

De gevolgen van de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde voor Kant's filosofie van de wiskunde

G.J.E. Rutten

1. Inleiding

De filosofische positie die Kant ten aanzien van de wiskunde ontwikkelde in zijn kritische periode¹ laat zich beknopt omschrijven als het zowel a priori als synthetisch zijn van wiskundige oordelen. Kant heeft dit standpunt verdedigd in zijn *Kritiek van de zuivere rede (A/B)* en in de *Prolegomena*².

In deze periode was het bestaan of zelfs maar de mogelijkheid van niet-euclidische meetkunde volstrekt ondenkbaar. Niet alléén Kant, maar al zijn tijdgenoten waren overtuigd van het feit dat er maar één meetkunde bestond en kon bestaan. Dit was de Euclidische meetkunde die zijn naam dankt aan de wiskundige Euclides die haar in de 3^{de} eeuw v. Chr. fundeerde op vijf evident veronderstelde postulaten. In de eerste helft van de 19^{de} eeuw werden echter niet-euclidische meetkundige stelsels ontdekt door Karl Friedrich Gauss, János Bolyai en Nikolai Lobatsjevski. Later in de 19^{de} eeuw breidde Georg Riemann de niet-euclidische meetkunde nog verder uit³. Kant heeft deze ontwikkeling nooit meegemaakt. Hij overleed in 1804 ruim vóór de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde.

In dit artikel wil ik de implicaties onderzoeken van de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde op de hierboven geformuleerde positie van Kant. Is het zo dat deze ontdekking feitelijk het einde betekent van Kant's filosofie van de wiskunde? Vooral in mathematisch natuurwetenschappelijk georiënteerde kringen komt men deze opvatting tegen. Er wordt dan bijvoorbeeld gesteld dat de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde een directe weerlegging betekent van Kant's positie t.a.v. de wiskunde of zelfs van (grote delen van) zijn kritische transcendentale filosofie zoals hij deze heeft uitgewerkt in zijn *Kritiek van de zuivere rede* en heeft toegelicht in zijn *Prolegomena*.

Er zijn ook Kant commentatoren die stellen dat de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde géén invloed heeft op Kant's transcendentale filosofie en derhalve ook niet op zijn filosofie van de wiskunde. Zo is Raymund Schmidt een Kant commentator voor wiens denken over Kant het van geen enkele betekenis lijkt dat in de 19^{de} eeuw een ware wetenschappelijke revolutie heeft plaatsgevonden in de meetkunde. Schmidt stelt bijvoorbeeld dat: "De bewering dat de introductie van dit schema⁴ in de wetenschap Kant's constatering over de aprioriteit (het meeplaatsen) van het euclidische ruimteschema in de proposities van de euclidische geometrie weerlegt, is totaal onbegrijpelijk. Kant's gedachten kunnen zonder enige moeite ook op niet-euclidische proposities toegepast worden en op ieder ander wiskundig fysisch ruimte-tijd schema dat geldigheid claimt"⁵.

¹ Kant's kritische periode loopt globaal van 1781 (publicatie van de A druk van zijn eerste kritiek) tot 1790 (publicatie van de laatste van zijn in totaal drie kritieken) en wordt voorafgegaan door een 'incubatietijd' die begint in 1770 met de publicatie van Kant's dissertatie voor het verwerven van het hoogleraarschap in de logica en metafysica (getiteld 'De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principii' ofwel 'Verhoog over de vorm en principes van de zinlijke en intelligibele wereld')

² *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können* (1783) ('Prolegomena tot elke toekomstige metafysica die als wetenschap kan gelden')

³ Zie het boek *Quod Erat Demonstrandum* ('Inzien en bewijzen') van Jan van Eijck en Albert Visser voor een historische schets van de ontdekking van niet-euclidische meetkundige stelsels. (<http://www.cwi.nl/~jve/qed/>)

⁴ Met dit schema bedoeld Raymund Schmidt de niet-euclidische meetkunde

⁵ Zie deel II van zijn boek 'Die drei Kritiken in ihrem Zusammenhang mit dem Gesamtwerk', 1975 Alfred Kröner Verlag, Stuttgart. Nederlandse vertaling: Uitgeverij SUN, Amsterdam 2003

Hieronder zal ik betogen dat Kant's filosofie van de wiskunde niet als volledig weerlegd hoeft te worden beschouwd door de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde. Er bestaat namelijk een coherente interpretatie van Kant's filosofie van de wiskunde die laat zien dat ook ná de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde zinvol gesproken kan worden over het a priori synthetisch zijn van de wiskunde. Aan de andere kant is het zeker niet zo dat genoemde ontwikkeling geheel zonder gevolgen kan blijven voor Kant's opvattingen over de aard van de wiskunde.

Gezien de nadruk op de confrontatie van Kant's positie met de niet-euclidische meetkunde zal ik mij in dit artikel richten op de meetkunde en derhalve op 'de ruimte' welke volgens Kant de zuivere a priori aanschouwingsvorm is van de uiterlijke ervaring van het kennend subject en door hem strikt gekoppeld wordt aan de meetkunde. Dit betekent dat de tijd (welke volgens Kant de zuivere a priori aanschouwingsvorm is van de innerlijke ervaring van het kennend subject en door Kant gekoppeld wordt aan rekenkunde) hier niet nader zal worden behandeld. De opvattingen van Kant ten aanzien van tijd en rekenkunde zijn echter analoog aan zijn opvattingen over ruimte en meetkunde. Wat in dit artikel over de meetkunde wordt gesteld geldt daarom meer algemeen voor de wiskunde als zodanig.

Aan Kant's kritische werk over de theoretische rede kunnen twee interpretaties worden ontleend van het synthetisch a priori zijn van wiskundige oordelen. De eerste interpretatie zal ik de cognitief-gedomineerd noemen en de tweede zal ik aanduiden als logisch-gedomineerd. De reden hiervoor is tweeledig. In de eerste plaats zal blijken dat de cognitief-gedomineerde interpretatie sterk de nadruk legt op het cognitieve aspect van synthetische oordelen. Een synthetisch oordeel dient onze kennis van de fenomenale wereld te verruimen ofwel te vermeerden ('erweiterungsurteil'). De logisch-gedomineerde interpretatie kiest haar vertrekpunt in het logische aspect van synthetische oordelen. Hierbij gaat het om het feit dat begripsanalyse in combinatie met het PNC⁶ onvoldoende is om synthetische oordelen te rechtvaardigen⁷. In de tweede plaats zal blijken dat beide interpretaties overeenkomen voor wat betreft het a priori zijn van wiskundige oordelen.

Nadat ik beide interpretaties heb behandeld zal ik betogen dat de cognitief-gedomineerde interpretatie inderdaad als weerlegd moet worden beschouwd door de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde terwijl dit niet geldt voor de logisch-gedomineerde interpretatie. Voordat ik inga op beide interpretaties wil ik eerst laten zien dat het niet noodzakelijk is om te veronderstellen dat de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte voor wat betreft haar ordenende structuur geheel samenvalt met het geometrische stelsel van de euclidische meetkunde om de uiteenzettingen over deze aanschouwingsvorm in zowel de transcendentale esthetica van de eerste Kritiek als het ermee corresponderende deel van de Prolegomena⁸ te accepteren. Dit is van belang om te kunnen concluderen dat de logisch-gedomineerde interpretatie niet geraakt wordt door de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde.

2. De rol van de Euclidische meetkunde in Kant's uiteenzettingen over de ruimte

In het eerste deel van de transcendentale hoofdvraag van de Prolegomena motiveert Kant dat de ruimte een zuivere a priori aanschouwingsvorm is die noodzakelijk aan de meetkunde ten grondslag ligt. Deze aanschouwingsvorm stelt de meetkundige namelijk in staat om meetkundige begrippen 'in concreto' en geheel a priori te construeren (P7). Meetkunde wordt dan ook beschouwd als een zuiver

⁶ PNC is een principe van de algemene logica en staat voor principium (non) contradictionis ofwel 'de wet van de tegenspraak'. Kant geeft hiervan in zijn Kritiek van de zuivere rede de volgende definitie: "De uitspraak dat géén ding een predikaat kan hebben dat ermee in tegenspraak is" (A151/B190). Een andere definitie is bijvoorbeeld dat een subject A niet tegelijkertijd zowel B en niet-B als predikaat kan hebben. De categorische oordelen 'A is B' en 'A is niet-B' kunnen niet tegelijkertijd waar zijn.

⁷ In het geval van categorische oordelen volgens het Subject(S)-Predikaat(P) schema reduceert deze logische conditie tot het niet bevat zijn ('nicht enthalten sein in') van het predikaat P in het subject S: niet EI(P,S).

⁸ 'Het eerste deel van de transcendentale hoofdvraag: Hoe is zuivere wiskunde mogelijk?' (P6-13)

product van de rede en berust derhalve niet op empirisch zintuiglijke ervaring (P6). Deze uitspraken en de toelichting hierop die Kant in het desbetreffende hoofdstuk van de Prolegomena geeft vereisen niet dat er maar één geometrisch stelsel (namelijk de Euclidische) bestaat.

Nadere bestudering wat Kant over de ruimte zegt in de transcendentale esthetica van de Kritiek van de zuivere rede leert dat het ook hier niet vereist is om te veronderstellen dat er maar één meetkundig stelsel bestaat (namelijk de Euclidische). De transcendentale esthetica begint met een metafysische uiteenzetting van het begrip ruimte⁹. Charles Parsons benadrukt in zijn artikel¹⁰ dat Kant in deze uiteenzetting uitgaat van vier nogal fenomenologisch getinte aspecten van het begrip ruimte: (1) “Ruimte is géén empirisch begrip dat van uiterlijke ervaringen is afgeleid (A23/B38)”. (2) “Ruimte gaat vooraf aan elke ervaring. Men kan zich nooit voorstellen dat er geen ruimte is, terwijl men zich goed kan voorstellen dat er geen objecten in de ruimte worden aangetroffen (A24/B38)”. (3) “De ruimte is singulier omdat men zich maar één ruimte kan voorstellen. Wanneer men het over vele ruimtes heeft, dan verstaat men daar alleen delen van een en dezelfde, enige ruimte onder (A25/B39)”. (4) “Ruimte is een oneindig gegeven grootte” (A25/B40).

Deze vier observaties leiden bij Kant tot de conclusie dat ruimte a priori (vanwege de eerste twee aspecten) én een aanschouwing (vanwege de laatste twee aspecten¹¹) moet zijn. Ruimte is dus een zuivere a priori aanschouwingsvorm. Merk op dat deze conclusie wederom niet vereist dat de ruimte als zuivere a priori aanschouwingsvorm een unieke geometrische structuur moet hebben die alleen Euclidisch kan zijn. In feite doet de metafysische uiteenzetting helemaal géén beroep op een specifiek meetkundig stelsel. Uiteraard kan volgehouden worden dat dit zo is omdat Kant impliciet uitgaat van het noodzakelijk bestaan van slechts één meetkunde (namelijk de Euclidische). In dit artikel gaat het echter niet om Kant's impliciete opvattingen maar om de vraag in hoeverre de in zijn kritische werk beschreven transcendentale filosofie ruimte laat voor alternatieve meetkundige stelsels.

In de rest van de transcendentale esthetica doet Kant een aantal uitspraken over de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte die ook niet impliceren dat deze aanschouwingsvorm een Euclidische structuur heeft. Zo stelt Kant (wederom) dat ruimte een zuivere a priori aanschouwingsvorm van de waarneming is en dat a posteriori gewaarwordingen de materie van de waarneming uitmaken, dat ruimte zich in de zintuiglijkheid van het kennend subject bevindt en reeds gekend wordt voor alle mogelijke ervaring, dat ruimte alle ervaring eerst mogelijk maakt, dat ruimte geen eigenschap van de dingen op zichzelf is, dat ruimte zonder kennend subject een geheel leeg begrip zou zijn en dat de dingen zoals ze op zichzelf zijn voor het kennend subject (daarom) totaal onkenbaar zijn¹². Géén van deze claims vereisen dat de ruimte als a priori aanschouwingsvorm Euclidisch moet zijn.

Hetzelfde geldt voor de overige claims die Kant in de transcendentale esthetica maakt en die nauw verwant zijn aan de hier genoemde claims. Illustratief is bijvoorbeeld Kant's uitspraak dat de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte ons leert dat in de fenomenale wereld alle dingen ‘buiten ons’ bestaan en bovendien ‘naast elkaar in de ruimte bestaan’ (A28/B43). Dit is wederom een sterk fenomenologisch getint aspect dat los staat van het al dan niet Euclidisch zijn van de ruimte. Hetzelfde geldt voor Kants uitspraak dat de innerlijke bepaling van elke ruimte alléén mogelijk is door de bepaling van de uiterlijke verhouding tot de gehele ruimte, waarvan eerstgenoemde ruimte

⁹ Onder een uiteenzetting verstaat Kant een duidelijke presentatie van wat tot een begrip behoort. Zij is metafysisch als ze bevat wat het begrip als a priori gegeven begrip veronderstelt. Zie ondermeer A23/B38.

¹⁰ ‘The Transcendental Aesthetic’, *The Cambridge Companion to Kant* (Cambridge University Press 1992)

¹¹ Een aanschouwing is volgens Kant immers zowel singulier als onmiddellijk (direct) gegeven.

¹² Kant stelt in de Kritiek bijvoorbeeld dat “Alles wat aan onze zintuigen gegeven wordt, wordt slechts door ons aanschouwd zoals het ons verschijnt en niet zoals het op zichzelf is” en “We poneren de empirische realiteit van de ruimte t.a.v. uiterlijke ervaring, maar ook de transcendentale idealiteit ervan” (A28/B44)

een deel is' (P13).

Kant geeft zowel in de *Kritiek van de zuivere rede* als in de *Prolegomena* allerlei voorbeelden van het gebruik van de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte door een meetkundige. Dit doet hij met name om te laten zien dat meetkundige oordelen niet louter door begripsanalyse (en toepassing van PNC) afgeleid kunnen worden¹³ en het kennend subject dus wel zijn toevlucht tot de aanschouwing moet nemen. Opnieuw kan opgemerkt worden dat géén van genoemde voorbeelden steunt op het Euclidisch zijn van de ruimte.

Verder dient de beroemde paradox in de *Prolegomena* over de linker en de rechter hand uitsluitend om te laten zien dat het relationele ruimtebegrip van Leibniz niet correct kan zijn en de ruimte een vorm van de zintuiglijke aanschouwing is en niet een werkelijke hoedanigheid van de dingen op zichzelf. Ook hier is de aanname dat er slechts één meetkundig stelsel bestaat niet nodig.

Het is dus in beginsel mogelijk om Kant's a priori aanschouwingsvorm ruimte op te vatten als een transcendentiaal element van het kenvermogen welke niet restloos samenvalt en dus niet gebonden is aan één bepaald meetkundig stelsel (zoals de Euclidische meetkunde). Deze opvatting is niet in strijd met Kant's overtuiging dat we als kennend subject de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte aan de gewaarwordingen opleggen, ofwel alle van buiten komende zintuiglijke prikkels ordenen in de ruimte. Genoemde opvatting impliceert echter niet langer dat de (door het kennend subject geconstrueerde) fenomenale ruimte restloos Euclidisch is. Een zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte die meerdere meetkundige stelsels voorstelbaar maakt legt immers niet langer noodzakelijk één specifiek meetkundig stelsel (zoals de Euclidische meetkunde) aan de empirische gewaarwordingen op.

3. Twee interpretaties van Kant's a priori synthetische oordelen in de meetkunde

De cognitief-gedomineerde interpretatie gaat uit van de gedachte dat de ruimtelijke structuur van de fenomenale wereld noodzakelijk euclidisch is. De zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte die zich in het kenvermogen van ieder kennend subject bevindt¹⁴ werkt namelijk zodanig dat alle van buiten komende zintuiglijke prikkels ('empfindungen') geordend worden in een meetkundige ruimte die voldoet aan de vijf postulaten van Euclides. De aard van de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte is dus wezenlijk Euclidisch. Zij heeft een unieke geometrische structuur die restloos samenvalt met die van de Euclidische meetkunde. Meetkundige oordelen zijn derhalve noodzakelijk Euclidisch en tegelijkertijd ware uitspraken over de fysieke ruimte van de fenomenale wereld¹⁵. Dergelijke oordelen zijn volgens Kant synthetisch omdat ze onze kennis van deze wereld uitbreiden. Het oordeel dat de som van de driehoeken van een driehoek 180° is verruimt onze kennis van de ervaren wereld en moet dus een synthetisch oordeel zijn. Dergelijke oordelen kunnen niet het resultaat zijn van uitsluitend een conceptuele begripsanalyse volgens algemeen logische principes (zoals het PNC).

¹³ "Alle bewijzen van volkomen gelijkheid van twee gegeven figuren komen er uiteindelijk op neer dat zij elkaar dekken. Dat is onmiskenbaar een op onmiddellijke aanschouwing berustende synthetische uitspraak (P12)". "Dat de ruimte van de fenomenale wereld drie dimensies heeft volgt uit onmiddellijke aanschouwing van de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte (P12)". "Dat men kan eisen dat een lijn tot in het oneindige kan worden doorgetrokken (P12)". "Dat twee rechte lijnen geen ruimte insluiten en dus geen figuur kunnen vormen, terwijl dit voor drie lijnen wel geldt (B65/A48)".

¹⁴ Kant noemt deze aanschouwingsvorm ook wel de uiterlijke zintuiglijkheid (een eigenschap van onze geest) waarmee we ons objecten voorstellen als buiten ons en als zich samen in de ruimte bevindend. Zie A23/B37.

¹⁵ Uiteraard geldt dit niet voor de noumenale wereld. Hoe de dingen op zichzelf zijn is voor het kennend subject namelijk volstrekt ontoegankelijk en ruimte is bij Kant dan ook relatief omdat zij als vorm in de waarneming wordt gelegd door het kennend subject. Het zich bevinden in de ruimte is dus géén eigenschap van de dingen 'an sich'. Kant spreekt in dit verband over zowel de subjectiviteit als idealiteit van de ruimte.

Meetkundige oordelen zijn in de cognitief-gedomineerde interpretatie ook a priori omdat de herkomst¹⁶ het kenvermogen van het kennend subject betreft en niet de empirische zintuiglijkheid. Meetkundige oordelen kunnen door het kennend subject los van iedere empirische ervaring gekend worden. Hiertoe beschikt ieder kennend subject over de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte. Doordat deze zuivere aanschouwingsvorm zich volledig in het kenvermogen van het kennend subject bevindt is het kennend subject in staat om geheel los van de ervaring meetkundige begrippen (zoals een driehoek) te construeren en oordelen over deze begrippen te demonstreren (A713/B741). Dit doet het kennend subject door zich in de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte een concreet aanschouwelijke geometrische voorstelling te maken van objecten van mogelijke ervaring¹⁷ en vervolgens in concreto meetkundige eigenschappen van deze objecten te demonstreren aan de hand van aanschouwelijke geometrische bewerkingen (A716/B744). Overigens zijn in deze interpretatie meetkundige oordelen ook a priori omdat zij los van de ervaring gerechtvaardigd kunnen worden en dus noodzakelijk geldig zijn. Ze zijn noodzakelijk omdat ze niet door toekomstige empirische ervaringen kunnen worden weerlegd. Kant gebruikt hiervoor ook wel de aanduidingen algemeen geldig of apodictisch.

In de logisch-gedomineerde interpretatie van Kant's positie wordt het a priori zijn van wiskundige oordelen op dezelfde wijze opgevat als in de eerste interpretatie. Beide interpretaties verschillen dus alléén in de manier waarop het synthetisch zijn van wiskundige oordelen wordt begrepen. In de tweede interpretatie zijn wiskundige oordelen synthetisch vanwege de specifieke manier waarop ze afgeleid worden uit gegeven wiskundige concepten. De logisch-gedomineerde interpretatie komt overeen met de interpretatie zoals gegeven in het artikel "Kant's analytic judgements and the traditional theory of concepts" van W.R. de Jong¹⁸. De Jong maakt in zijn artikel duidelijk dat Kant's notie van analytische (en daarmee synthetische) oordelen afdoende kan worden geanalyseerd binnen de gelimiteerde context van een eenvoudige kwantorvrije logica van concepten¹⁹. We zullen hier ook deze restrictie volgen. De kern van de analyse zoals uitgevoerd in genoemd artikel is dat volgens Kant een a priori synthetisch oordeel een oordeel is waarbij het predikaat een attribuut²⁰ is van het subject dat noodzakelijk volgt uit de essentie van het subjectbegrip maar er niet in bevat is. Dit betekent dat begripsanalyse in combinatie met het toepassen van het PNC niet volstaat om te bewijzen dat het attribuut noodzakelijk volgt uit de essentie van het subjectbegrip²¹. Er zal dus volgens Kant in plaats van een 'analytische afleiding volgens het PNC' gebruikgemaakt moeten worden van een geheel 'ander principe'. In het geval van de meetkunde is dit 'andere principe' niets anders dan de hierboven beschreven 'in concreto' demonstratie van geometrische eigenschappen in de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte door het kennend subject. Oordelen in de meetkunde zijn uitsluitend synthetisch omdat voor de afleiding van dergelijke oordelen een beroep gedaan moet worden op de concrete aanschouwelijkheid²². Meetkundige oordelen zijn dus synthetisch omdat naast het subject en

¹⁶ Herkomst betreft de vraag waar de kennis vandaan komt ofwel de vraag naar de kennisbron. Kant maakt onderscheid tussen 2 kenbronnen: kennis uit (zintuiglijke) ervaring en kennis uit zuiver verstand/rede (P1).

¹⁷ Hierbij wordt door het kennend subject afgezien van alle zintuiglijk empirische aspecten die objecten kunnen hebben. Kant spreekt over zuivere voorstellingen (in transcendentale zin) als voorstellingen waarin niets wordt aangetroffen wat tot de gewaarwording (empfindung) ofwel 'de materie' behoort. Zie A20/B34.

¹⁸ Dit artikel is gepubliceerd in: *Journal of the History of Philosophy* XXXIII (1995), 613-641

¹⁹ In een dergelijke context zijn alle oordelen categorisch ofwel oordelen waarvan de logische vorm beantwoord aan het zogenaamde subject-predikaat (S-P) schema.

²⁰ Attribuut wordt hier bedoeld als 'proprium' of 'rationata'. Zie §10 van de Jong's artikel voor toelichting.

²¹ Een dergelijke aanpak zou wel afdoende zijn wanneer het attribuut in de essentie van het subjectbegrip bevat zou zijn omdat in dat geval het oordeel een analytisch oordeel is.

²² Merk hierbij op dat deze interpretatie niet wezenlijk wordt beïnvloed door de moderne predikaten logica welke Kant niet gekend heeft. Wanneer Kant de moderne predikaten logica op zijn merites had beoordeeld zouden waarschijnlijk een aantal predikaatlogische afleidingsregels door hem als 'synthetisch' in plaats van 'analytisch' zijn beschouwd. Een voorbeeld is de introductieregel voor de universele kwantor of iedere andere

predikaat begrip ook de zuivere aanschouwing van een individueel concreet meetkundig object noodzakelijk is om de geldigheid van het oordeel in te zien (B17). Het PNC in combinatie met begripsverheldering is hiervoor volstrekt onvoldoende.

In logisch-gedomineerde interpretatie zijn meetkundige oordelen a priori vanwege het feit dat de vereiste aanschouwelijkheid (het onmiddellijk betrokken zijn op een singulier object) in het geval van meetkunde komt van de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte. Voor de rechtvaardiging van deze oordelen is dus geen beroep op de zintuiglijke ervaring nodig. Zoals bekend verbindt Kant ‘a priori’ steeds aan noodzakelijkheid en algemeen geldigheid. Wiskundige oordelen zijn onder de logisch-gedomineerde interpretatie inderdaad noodzakelijk en algemeen geldig. We dienen deze noodzakelijkheid dan echter niet langer te betrekken op wat er in de fenomenale wereld het geval moet zijn (zoals gebeurd in de eerste interpretatie) maar juist op de apodictische geldigheid van het oordeel binnen de context van een bepaald meetkundig stelsel.

We zien dus dat in de logisch-gedomineerde interpretatie van wiskundige oordelen als synthetische a priori oordelen géén enkele verwijzing wordt gemaakt naar een specifieke geometrische structuur die door de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte aan de fysieke ruimte van de fenomenale wereld zou worden opgelegd. De eerder behandelde cognitief-gedomineerde interpretatie is voor wat betreft het synthetisch zijn van dergelijke oordelen daarentegen wel gebaseerd op wat meetkundige oordelen ons te vertellen hebben over de feitelijke geometrische structuur van de ruimte van de fenomenale wereld. Dit verschil is van belang voor het antwoord op de hoofdvraag van dit artikel²³.

4. Implicaties van de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde op Kant's positie

De ontdekking van niet-euclidische meetkunde heeft duidelijk gevolgen voor de cognitief-gedomineerde interpretatie. Wanneer blijkt dat meerdere elkaar uitsluitende meetkundige stelsels denkbaar zijn moet (om binnen Kants conceptie van meetkunde en feitelijk van zijn gehele transcendentaal filosofie) te blijven geconcludeerd worden dat de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte meerdere meetkundige stelsels voorstelbaar maakt. Deze aanschouwingsvorm kan als geometrisch orderings-principe dus niet restloos samenvallen met de Euclidische meetkunde. De geometrische structuur van de fenomenale wereld valt dus niet noodzakelijk samen met die van de Euclidische meetkunde. Wanneer we de eerste interpretatie volgen moet Kant's conceptie van meetkunde (en daarmee van wiskunde) als synthetische a priori wetenschap als weerlegd worden beschouwd.

Dit geldt echter niet voor de logisch-gedomineerde interpretatie. Meetkundige oordelen zijn volgens de tweede interpretatie nog altijd synthetisch a priori. Voor het bewijzen van geometrische eigenschappen van meetkundige objecten is immers nog steeds de ruimte als zuivere a priori aanschouwingsvorm vereist. Deze vorm laat nu echter meerdere meetkundige stelsels toe hetgeen betekent dat de meetkundige vooraf moet besluiten binnen welk specifiek meetkundig stelsel hij oordelen wil gaan vormen. Ongeacht het specifieke meetkundige stelsel is de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte volstrekt noodzakelijk om tot meetkundige oordelen binnen dat stelsel te komen. Iedere meetkundig oordeel blijft dus een synthetisch oordeel in de zin van de tweede interpretatie. Wel krijgen meetkundig oordelen nadrukkelijk een hypothetisch karakter²⁴. Zij zijn

predikaatlogische regel die het poneren van een individu (ofwel concreet individueel object) vereist.

²³ De 1ste interpretatie beschouwt de fysische ruimte van de fenomenale ervaringswereld als object van de meetkunde ('toegepaste meetkunde'). Voor de 2de interpretatie is het object eerder de collectie van diverse meetkundige stelsels ('theoretische meetkunde'). Kant maakte tussen beide aspecten uiteraard géén verschil.

²⁴ Kant maakt zelf een onderscheid tussen categorische, hypothetische en disjunctieve oordelen in zijn tabel van de logische oordeelsvormen (A70/B95). De cognitief-gedomineerde interpretatie veronderstelt feitelijk dat alle meetkundige oordelen categorisch zijn terwijl de logisch-gedomineerde interpretatie juist tot de conclusie

immers van de vorm ‘Uitgaande van meetkundig stelsel X geldt dat object Y eigenschap Z heeft’. Het oordeel zegt iets wezenlijks over de aard van de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte (zij is er in afgeleid en had niet afgeleid kunnen worden zonder er een beroep te doen). Een dergelijk oordeel had dus nooit op basis van louter begripsanalyse in combinatie met PNC bewezen kunnen worden.

Meetkundige oordelen kunnen in het geval van de tweede interpretatie ná de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde ook nog altijd als a priori worden beschouwd omdat zij geheel los van de empirische zintuiglijkheid worden afgeleid, als bron het kenvermogen van het kennend subject hebben en als hypothetisch oordeel nog altijd volstrekt noodzakelijk en algemeen geldig zijn.

Uitgaande van de tweede interpretatie kan dus worden gesteld dat Kant’s conceptie van de wiskunde als synthetische a priori wetenschap geldig blijft ook als we rekening houden met het bestaan van meerdere elkaar uitsluitende meetkundige stelsels. Verder wordt duidelijk dat onder de tweede interpretatie de structuur van de aanschouwingsvorm ruimte niet restloos Euclidisch kan zijn. Dit sluit goed aan bij de bevindingen van paragraaf 2. Daar bleek het voor het accepteren van Kant’s opvattingen t.a.v. de idealiteit en subjectiviteit van de ruimte als zuivere a priori aanschouwingsvorm onnodig te zijn om aan te nemen dat deze aanschouwingsvorm wezenlijk Euclidisch is. Kant laat in zijn *Kritiek van de zuivere rede* en in zijn *Prolegomena* dus (uiteeraard geheel onbedoeld!) ‘ruimte’ voor alternatieve voorstelbare geometrische structuren ‘in’ de aanschouwingsvorm ruimte. De ruimte wordt daardoor ‘een fundamenteel fenomenologisch gegeven’ (zoals ook C. Parsons in zijn artikel opmerkt) dat ieder specifiek meetkundig stelsel overstijgt maar tegelijkertijd als zuivere a priori aanschouwingsvorm onmisbaar is om stellingen in een bepaald meetkundig stelsel te bewijzen.

5. Conclusie

De conclusie die we aan het eind van dit artikel kunnen trekken is dat Kant’s conceptie van wiskunde als synthetische a priori wetenschap niet achterhaald is door de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde zolang we uitgaan van de tweede in dit artikel verwoorde interpretatie. Het interessante is dat Kant zelf niet alleen bepaalde aspecten van deze interpretatie op een verschillende plaatsen heeft verdedigd²⁵ maar daarnaast in zowel zijn *Kritiek van de zuivere rede* (als in zijn *Prolegomena*) duidelijk ruimte laat voor een dergelijke interpretatie. Het ‘kritiekloos’ verwerpen van Kant’s filosofie van de wiskunde of zelfs (grote delen van) Kant’s kritische transcendentale filosofie op basis van het enkele feit van het bestaan van alternatieve (niet-euclidische) meetkundige stelsels dient dan ook als voorbarig te worden gekwalificeerd. Een dergelijke verwerping gaat uit van de eerste in dit artikel behandelde interpretatie die zoals aangegeven helemaal niet de enige mogelijke is voor Kant’s filosofie van de wiskunde.

De tweede interpretatie kan tenslotte als rudimentaire voorloper worden beschouwd van Brouwer’s intuïtionisme (wiskunde als mentaal aanschouwelijke constructie activiteit). Daarnaast voerpelt zij dat het logicisme²⁶ van Frege en Russell wel moest falen. Wiskunde is in deze interpretatie immers synthetisch vanwege de vereiste (intuïtieve) aanschouwing in haar bewijsvoering.

moet leiden dat meetkundige oordelen hypothetisch zijn (naast a priori en synthetisch).

²⁵ Hier doel ik op de ‘in concreto’ demonstratie binnen de zuivere a priori aanschouwingsvorm ruimte welke vereist is om de geldigheid van meetkundige oordelen te bewijzen. De vereiste demonstraties stijgen als het ware boven de gegeven wiskundige concepten en de algemene regels van de logica uit én maken daarom de desbetreffende meetkundige oordelen synthetisch in plaats van analytisch. Kant behandelt dit met name in de transcendentale methodeleer van zijn eerste *Kritiek* maar ook in zijn pre-kritische werk ‘*Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral*’. Het artikel ‘How is metaphysics as a science possible?’ (uit: *The Review of Metaphysics XLVII* (1995) van W.R. de Jong gaat hier nader op in.

²⁶ Het logicisme poot de wiskunde volledig tot logica te reduceren door alle aanschouwelijke intuïtie geheel uit de wiskundige bewijsvorming te elimineren. Onder wiskundigen kreeg het logicisme nooit veel aanhang.