# De algebraïsche logica van George Boole en haar relatie tot de wiskunde, de syllogistiek en Leibniz' universele wetenschappelijke methode

G.J.E. Rutten

## 1. Introductie

Het onderwerp van mijn literatuurstudie betreft de algebraïsche logica van George Boole. Ik heb mij voor deze studie met name gericht op drie vragen die al mijn interesse hadden voordat ik aan deze literatuurstudie begon. Allereerst de vraag in hoeverre Boole's logica beschouwd kan worden als een formeel systeem met heldere definities, axioma's en streng bewezen stellingen zoals dat bijvoorbeeld in de wiskunde gebruikelijk is. In de tweede plaats de vraag hoe Boole's logica zich verhoudt tot de traditionele leer van het syllogisme welke door Aristoteles is ontwikkeld in zijn Analytica Priora. Tenslotte de vraag in hoeverre Boole's logica beantwoordt aan het ideaal van Leibniz om te komen tot een *lingua characterica* met bijbehorende *calculus ratiocinator*.

In paragraaf 2 van dit verslag van mijn literatuurstudie zal ik allereerst ingaan op genoemd ideaal van Leibniz. Hiertoe heb ik met name gebruikgemaakt van Leibniz' tekst 'On the general characteristic' uit 1679 welke is behandeld tijdens het college 'Inleiding moderne filosofie' en het artikel 'On Leibniz' Characteristic Numbers' van Klaus Glashoff.

Vervolgens bespreek ik in paragraaf 3 Boole's algebraïsche logica. Hierbij zal ik zoveel mogelijk aansluiten bij de manier waarop Boole zelf zijn logica behandelt in zijn hoofdwerk 'Investigation of the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities' uit 1854. Voor mijn literatuurstudie heb ik de eerste 15 hoofdstukken van dit werk bestudeerd. Dit betekent dan ook dat ik hier niet zal ingaan op Boole's waarschijnlijkheidsleer welke met name in het tweede gedeelte van zijn hoofdwerk wordt behandeld.

Om een zo goed mogelijk beeld van Boole's symbolisch algebraïsche methode te verkrijgen heb ik naast genoemd hoofdwerk ook zijn 'The Calculus of Logic' bestudeerd. In dit artikel uit 1848 geeft Boole een beknopte beschrijving van de belangrijkste eigenschappen van zijn logisch systeem voor primaire proposities. Ik kom hieronder nog terug op Boole's definitie van primaire proposities. Daarnaast heb ik voor met name de relatie tussen Boole's logica en de klassieke syllogismeleer ook het artikel 'Aristotle's Prior Analytics and Boole's Laws of Thought' van John Corcoran bestudeerd.

In de laatste paragraaf van dit verslag zal ik mijn bevindingen bespreken tegen de achtergrond van de hierboven genoemde drie vragen. Voor deze evaluatie heb ik mede gebruikgemaakt van de voor mijn literatuurstudie gelezen artikelen van Gottlob Frege ('Über den Zweck der Begriffsschrift'), Jean van Heijenoort ('Logic as Calculus and Logic as Language') en Volker Peckhaus ('Calculus Ratiocinator vs. Characteristica Universalis? The Two Traditions in Logic, Revisited'). Paragraaf 3 loopt overigens in een aantal opzichten reeds op deze evaluatie vooruit.

### 2. Het ideaal van Leibniz

Leibniz streefde naar een eenheidswetenschap en wilde dan ook alle wetenschappelijke kennis samenbrengen in één overkoepelend systeem. Hij ging hierbij uit van het zogenaamde conjunctie-model van concepten. Dit betekent dat volgens Leibniz alle samengestelde concepten waarvan wij in ons denken gebruikmaken geanalyseerd kunnen worden als een conjunctie van enkelvoudige concepten. Deze enkelvoudige concepten kunnen niet verder geanalyseerd worden en zijn daarom de grondbegrippen waarop al onze wetenschappelijke kennis uiteindelijk is gebaseerd. Leibniz verbindt nu ieder van deze enkelvoudige concepten met een ondubbelzinnig teken ('karakter'). Een samengesteld concept wordt door hem dan gedenoteerd als een concatenatie van tekens van enkelvoudige concepten waarvan de conjunctie gelijk is aan dit samengestelde concept. Zo wil Leibniz komen tot een universele tekentaal (‘lingua characterica’).

Neem als voorbeeld het concept ‘mens’. Dit concept kan geanalyseerd worden als ‘rationeel dier’. Door nu de tekens m, r en d te verbinden met de concepten ‘mens’, ‘rationeel’ en ‘dier’ volgt nu dat m gelijk is aan rd (ofwel m=rd).

Leibniz wil zijn lingua characterica zodanig opzetten dat iedere uitdrukking in deze taal met formele middelen gemanipuleerd kan worden. Hiertoe heeft Leibniz een universele rekenmethode (‘calculus ratiocinator’) nodig die hij op zijn universele tekentaal kan toepassen. Leibniz dacht hierbij vooral aan een calculus die is gebaseerd op de algebra van de gehele getallen. De hierboven genoemde concatenatie van tekens heeft niet voor niets veel weg van een vermenigvuldigingsoperatie.

Om te onderzoeken in hoeverre zijn ideaal bereikbaar is ondernam Leibniz een haalbaarheidsstudie waarbij hij zijn ideaal gedeeltelijk uitwerkte voor een bepaald deel van de klassieke syllogismeleer. Hiertoe introduceerde Leibniz een rekenkundige interpretatie van de syllogismeleer door ieder categoriaal concept te verbinden met een positief geheel getal. Vervolgens was Leibniz in staat om categorische oordelen te schrijven als rekenkundige expressies en kon hij zelfs met deze expressies rekenen om uit gegeven oordelen nieuwe oordelen te deduceren.

Neem bijvoorbeeld de categoriale concepten A, B en C en stel dat A verbonden is met het getal 30, B met het getal 15 en C met het getal 3. Nu is 30=5x3x2 en dit betekent dat het samengestelde concept A gelijk is aan de conjunctie van drie enkelvoudige concepten waarvan C er één is. Een oordeel als ‘Alle X zijn Y’ kan nu gerepresenteerd worden door te eisen dat het getal verbonden met Y een deler is van het getal verbonden met X. Er geldt dan dat de oordelen ‘Alle A zijn B’ en ‘Alle B zijn C’ geldig zijn omdat 15 een deler is van 30 en 3 een deler van 15. Uit beide oordelen volgt volgens het perfecte syllogisme Barbara nu dat het oordeel ‘Alle A zijn C’ ook geldig is. Dit is inderdaad consistent met Leibniz rekenkundige interpretatie omdat 3 een deler is van 30.

Het doel van een dergelijke rekenprocedure is om uit premissen geformuleerd in de universele tekentaal alle mogelijke logische conclusies te berekenen. Leibniz ideaal is dus een universele taal met bijbehorende universele rekenmethode waarmee alle meningsverschillen tussen mensen kunnen worden verholpen. Zijn ‘lingua characterica’ en ‘calculus ratiocinator’ zijn dan ook onlosmakelijk met elkaar verbonden. Samen vormen zij twee zeer belangrijke bouwstenen van Leibniz’ universele wetenschappelijke methode.

## 3. Boole’s symbolische methode

*Boole’s doelstellingen en zijn opvattingen over de aard van de logica*

Boole ontwikkelt in zijn werk een symbolisch algebraïsche methode voor het formuleren van proposities en vinden van logische deducties. Deze methode wordt door hem gefundeerd op de fundamentele wetten van de mentale operaties waarmee het verstand redeneert. Boole gaat er zonder meer vanuit dat deze operaties een wetmatig karakter hebben. We zien hier een nauwe koppeling van de logica aan het menselijk denken. Deze koppeling tussen logica en denken vinden we bijvoorbeeld ook bij Descartes, Locke, Hume, Kant en J.S. Mill. Boole sluit dus aan bij een rijke traditie. Aan de problemen die samenhangen met een dergelijke conceptie van logica zoals de status van redeneer-fouten, het gevaar van relativisme of meer algemeen een verwaarlozing van het normatieve aspect van logica lijkt Boole géén speciale aandacht te besteden.

Boole sluit ook aan bij het Engelse empirisme door te stellen dat alle wetenschappelijke kennis voortkomt uit de ervaring. Dit geldt voor hem ook voor de wetten van de mentale operaties van het redeneren. De epistemologische status van deze ‘wetten van het denken’ is voor Boole echter niet vergelijkbaar met die van de wetten van de natuurwetenschappen. De natuurwetten komen tot stand door inductie op basis van een groot aantal observaties. Daarmee zijn de natuurwetten onzekere waarschijnlijkheidsuitspraken waarvan de kans dat zij geldig zijn toeneemt naarmate ze door meer verschillende observaties bevestigd worden.

De denkwetten zijn volgens Boole echter géén waarschijnlijkheidsuitspraken. Zij zijn namelijk volstrekt zeker en hun zekerheid volgt voor iedere denkwet afzonderlijk uit één enkele relevante introspectieve observatie van de werking van ons verstand. Additionele observaties van ons eigen denken doen het vertrouwen in hun geldigheid niet toenemen. We zien bij Boole dus een opmerkelijk soort kennis welke zowel apodictisch als op de (zelf)ervaring gebaseerd zou zijn. Het bestaan van dergelijke kennis gaat rechtstreeks in tegen de opvattingen van het empirisme. Zo stelt J.S. Mill dat alle logische wetten onzeker zijn omdat deze op dezelfde empirisch-inductieve manier gefundeerd zijn als de wetten van de natuurwetenschappen. Overigens is het ook voor Kant ondenkbaar dat er kennis bestaat die zowel apodictisch als aposteriori van aard is. Voor Kant is zekere kennis steeds verbonden met apriori kennis.

Boole stelt dat de fundamentele ‘wetten van het denken’ geheel wiskundig van aard zijn en bovendien identiek zijn aan de wetten van de ‘algebra der getallen’ indien we ons voor wat betreft het evalueren van deze wetten beperken tot de getallen 0 en 1. Merk overigens op dat dit absoluut niet hetzelfde is als het beperken van het getallendomein tot de getallen 0 en 1 zoals vaak gedacht wordt. Boole noemt verder zijn fundamentele denkwetten fundamenteel omdat volgens hem alle ‘algemene logische waarheden’ eruit afgeleid kunnen worden.

Boole behandelt ook twee eisen waaraan zijn symbolisch algebraïsche methode moet voldoen. In de eerste plaats moet de logische methode beschikken over een generieke eliminatie procedure voor het elimineren van ‘elementen’ die niet in de conclusie mogen voorkomen. In de tweede plaats moet de methode in staat zijn om op generieke wijze alle deductief geldige conclusies in iedere gewenste vorm van een gegeven verzameling premissen te bepalen. Boole stelt dat zijn methode aan beide eisen voldoet zonder hiervoor voor wat betreft de tweede eis een overtuigend argument te geven. Ik zal hier later nog op terugkomen.

*Boole’s onderscheid tussen primaire en secundaire proposities*

In Boole’s werk wordt een duidelijk onderscheid gemaakt tussen primaire (‘concrete’) en secundaire (‘abstracte’) proposities. Primaire proposities brengen relaties tussen dingen tot uitdrukking en secundaire proposities brengen relaties tussen feiten (ofwel proposities) tot uitdrukking. Volgens Boole is hier sprake van een wezenlijk en fundamenteel onderscheid tussen proposities. Boole geeft als voorbeeld van een primaire propositie de uitspraak dat alle mensen sterfelijk zijn. Dit soort ‘elliptische’ uitdrukkingen dienen volgens hem dan wel gelezen te worden als de uitspraak dat alle mensen sterfelijke wezens zijn. De klasse van mensen behoort dus tot de klasse van sterfelijke wezens. Boole geeft ondermeer als voorbeeld van een secundaire propositie de propositie "Als de zon totaal is verduisterd dan worden de sterren zichtbaar". Eveneens merkt Boole op dat het onderscheid tussen primaire en secundaire proposities enigszins te vergelijken valt met het in zijn tijd algemeen bekende onderscheid tussen ‘categorische’ en ‘hypothetische’ proposities. Deze vergelijking gaat echter maar in zéér beperkte mate op. Zo zijn lang niet alle secundaire proposities hypothetisch.

Volgens Boole is zijn symbolische methode van toepassing op zowel primaire als secundaire proposities. Boole claimt zelfs dat in beide gevallen exact dezelfde symbolen, wetten en afleidings-regels van toepassing zijn. Alléén de interpretatie van de gebruikte symbolen zou verschillen. In het eerste geval staan bijvoorbeeld de lettersymbolen a, b, c, etc.. voor klassen van individuen. In het tweede geval staan dezelfde lettersymbolen voor klassen van tijdstippen waarop de bij deze symbolen behorende proposities A, B, C, etc.. waar zijn. Boole maakt dus een scherp onderscheid tussen een abstract symboolsysteem en zijn semantische interpretaties. Op deze manier kan Boole zinvol stellen dat zijn symbolische methode twee verschillende semantische interpretaties kent. Boole's claim is overigens ongeldig. Er bestaan namelijk 'algemene logische waarheden' voor secundaire proposties die niet geldig zijn voor primaire proposities. Ik zal hier later nog op terugkomen.

Feitelijk stelt Boole dat de lettersymbolen a, b, c, etc.. in het geval van primaire proposities staan voor concepten die door het verstand gevormd worden. Boole's lettersymbolen zijn dus constanten en géén variabelen. Zo kan bijvoorbeeld het symbool a staan voor het concept mens. De 'omvang' (extensie) van zo'n concept bestaat echter uit een collectie van individuele objecten die voldoen aan de bij dit concept behorende definitie en die daarom onder het concept vallen. Om deze reden staan genoemde symbolen dus indirect toch voor klassen van individuen. Hieronder zal nog blijken dat Boole naast lettersymbolen voor concepten ofwel klassen van individuen ook symbolen introduceert voor de mentale operaties van het verstand (zoals '+', '-' en 'x').

Boole besteedt verreweg de meeste aandacht aan het ontwikkelen van zijn symbolische systeem voor primaire proposities. Wanneer hij uiteindelijk toekomt aan de behandeling van secundaire proposties verwijst hij veelvuldig terug naar zijn eerder behaalde resultaten voor het domein van de primaire proposities.

*Boole's systeem voor primaire proposities*
Om zijn logisch symbolische systeem voor primaire proposities te kunnen ontwikkelen onderzoekt hij allereerst de fundamentele wetten van het denken waarop dit systeem is gebaseerd. Boole leidt deze wetten op twee verschillende manieren af. In de eerste plaats door te kijken naar hoe onze taal in de praktijk werkt. In de tweede plaats door een introspectief onderzoek te doen naar hoe de mentale intellectuele operaties van ons verstand werken. Boole maakt duidelijk dat volgens hem beide 'ontdekkingspaden' tot precies dezelfde uitkomst moeten leiden omdat er een intrinsieke relatie bestaat tussen taal en denken. Voor Boole is taal namelijk het 'product' en het 'instrument' van het denken.

Het beschouwen van de mentale operaties van ons verstand doet hij naar eigen zeggen alléén 'voor zover nodig voor zijn symbolische methode'. Het is dus zeker niet zijn bedoeling om een volledig uitgewerkte psychologische theorie te ontwikkelen van de manier waarop ons verstand feitelijk denkt. Boole's werk kan volgens mij dan ook niet als een vorm van 'psychologisme' beschouwd worden temeer omdat voor hem uiteindelijk alle logische wetten volledig apodictisch en zuiver mathematisch van aard zijn. Bovendien speelt introspectie van ons eigen denken in zijn systeem alléén een rol voor het ontdekken van de fundamentele denkwetten. Wanneer deze wetten eenmaal gevonden zijn hoeft niet langer een beroep op de innerlijke ervaring te worden gedaan voor het ontwikkelen van zijn logisch systeem.

In het navolgende zal ik uiteenzetten hoe Boole de fundamentele denkwetten afleidt door introspectie van de mentale operaties van het verstand. Vervolgens zal ik Boole's symbolische systeem voor primaire proposities bespreken door dezelfde weg te bewandelen als Boole in zijn boek: allereerst een bespreking van de expressie van (complexe) termen, vervolgens die van primaire proposities en tenslotte de constructie van een generieke deductiemethode voor deze proposities. Met deze aanpak volgt Boole overigens een in zijn tijd bekende en klassieke indeling van de logica in de leer van begrippen, oordelen en geldige redeneervormen.

Volgens Boole beweegt het denken zich altijd binnen een bepaalde context die van geval tot geval kan verschillen. Alle objecten die in een gegeven context van belang zijn noemt Boole het 'universe of discourse' (UoD). Het UoD kan maar behoeft zeker niet gelijk te zijn aan het werkelijke universum.

Het hangt namelijk helemaal van de gegeven context af welke collectie objecten als het UoD beschouwd moet worden. Het UoD is in strikte zin het ‘ultieme subject van het denken’ binnen de gegeven context. Het verstand gebruikt concepten zoals ‘mens’ om uit het UoD alle objecten te selecteren die onder het gegeven concept vallen. In dit geval dus de klasse van alle mensen. Voor Boole zijn concepten dus uiteindelijk mentale operaties. Hij spreekt over de mentale operatie van het ‘selecteren’ of het ‘fixeren’. Merk op dat een bijvoeglijk naamwoord als ‘rood’ voor Boole ook een concept aanduidt. In dit geval het concept van alle rode dingen ofwel alle dingen die rood van kleur zijn. Het verstand kan meerdere selectieoperaties achtereenvolgens op een gegeven UoD toepassen. Zo kan bijvoorbeeld de klasse van alle witte paarden verkregen worden door eerst mentaal alle paarden uit het UoD te selecteren en vervolgens binnen deze selectie nader te fixeren op de paarden die wit zijn. Feitelijk stelt Boole dat de mentale operatie van het selecteren uit twee afzonderlijke mentale operaties bestaat. Allereerst ‘conceptie’ ofwel ‘verbeelding’ en vervolgens ‘attentie’ om daadwerkelijk de objecten te selecteren die onder een verbeeld concept vallen. Het eerste concept dat door de operatie ‘conceptie’ gevormd wordt is dan natuurlijk het UoD zelf.

Een aantal van de fundamentele wetten van het denken volgen volgens Boole nu vrij direct uit het evalueren van de eigenschappen van de mentale selectieoperator. Neem bijvoorbeeld twee concepten x en y en schrijf voor xy het (complexe) concept dat gevormd wordt door op het UoD eerst de objecten te selecteren die onder y vallen en vervolgens uit deze selectie de objecten te selecteren die onder x vallen. Het maakt geen verschil of we op een gegeven UoD eerst y en vervolgens x selecteren of eerst x en vervolgens y om te komen tot de klasse xy. Dus moet gelden dat xy=yx. De klasse xy bestaat dus uit de objecten die zowel onder x als onder y vallen. Wanneer x staat voor ‘paard’ en y voor ‘wit’ representeert de klasse xy dus alle witte paarden.

Verder maakt het geen verschil of we één of achtereenvolgens twee keer op een gegeven UoD alle objecten selecteren die onder een concept x vallen. Dus moet gelden dat xx = x ofwel $x^2 = x$. Dit is Boole’s beroemde ‘law of duality’. In zijn artikel uit 1848 spreekt hij over de ‘index law’. Boole beschouwt deze wet als ‘the seminal principle for a generic method in logic’.

Boole bespreekt ook de mentale operaties van het samenvoegen van delen tot een geheel en het afscheiden van een deel uit een geheel. De eerste mentale operatie vereist volgens Boole dat de betrokken delen disjuncte klassen van objecten zijn en de tweede operatie vereist volgens Boole dat het deel een deelklasse is van het geheel. Boole merkt op dat deze mentale operaties overeenkomen met het optellen en aftrekken van getallen in de algebra. Boole voert dan ook de notatie x+y in voor de klasse die wordt verkregen door het mentaal samenvoegen van de objecten van de disjuncte klassen x en y. Evenzo staat de klasse x-y voor de klasse die verkregen wordt door uit de klasse x de objecten van de deelklasse y mentaal te verwijderen. Door een reflexie op deze mentale operaties kan dan volgens Boole onmiddellijk ingezien worden dat inderdaad geldt dat x+y=y+x, z(x+y)=zx+zy en z(x-y)=zx-zy. Bovendien volgt uit x=y dat zx=zy voor iedere klasse z.

Hierboven hebben we al terloops Boole’s identiteitssymbool (=) geïntroduceerd. De algemene vorm van een primaire propositie is bij Boole dan ook f=g waarbij f en g algebraïsche expressies zijn van klassesymbolen. Deze logische vorm is veel ruimer dan die van proposities uit de syllogistiek. In de klassieke leer van het syllogisme worden oordelen namelijk uitsluitend geanalyseerd als een subject en een predikaat die volgens een bepaald copula met elkaar verbonden zijn. Boole houdt echter vast aan de klassieke terminologie door de term f het subject, het symbool = de copula en de term g het predikaat van de propositie f=g te noemen.

Neem als voorbeeld voor x de klasse van mannen, voor y de klasse van vrouwen en voor z de klasse van mensen. De primaire propositie ‘Ieder mens is een man of een vrouw (en omgekeerd)’ wordt in Boole’s systeem uitgedrukt als z=x+y. Uiteraard zijn veel complexere voorbeelden mogelijk. We zien bij Boole dus al een duidelijk onderscheid tussen enerzijds de grammaticale oppervlakte structuur van een in de natuurlijke taal gestelde beweerzin en anderzijds de zuiver logische vorm van de propositie die door deze beweerzin tot uitdrukking wordt gebracht. Dit onderscheid zou later bij Russell’s theorie van de unieke bepalingen een belangrijke rol spelen.

Boole was overigens van mening dat hij met zijn symbolische systeem voor primaire (en secundaire) proposities alle mogelijke beweerzinnen gesteld in natuurlijke taal kan uitdrukken. Deze overtuiging is echter niet terecht omdat bijvoorbeeld relaties tussen objecten (zoals ‘is groter dan’) in zijn symbolisme niet uitgedrukt kunnen worden. Bovendien is Boole met zijn systeem niet in staat om existentiële uitspraken (‘Er is een object met de eigenschappen…’) adequaat te representeren.

Boole voert vervolgens de symbolen 0 en 1 in welke respectievelijk de lege klasse (‘het niets’) en het UoD voorstellen. Onder deze interpretatie gelden de ook in de rekenkunde bekende wetten $0x=x$, $1x=x$ en $0+x=x$. Boole is zo al een heel eind op weg om een symbolisch systeem te ontwikkelen dat volgens hem gelijk is aan dat van de rekenkunde wanneer we ons voor wat betreft het evalueren van algebraïsche wetten beperken tot de getallen 0 en 1.

Om er daadwerkelijk voor te zorgen dat in zijn symbolisch systeem ‘gerekend’ kan worden noemt hij ook de axioma’s die zeggen dat een gelijkheid geldig blijft wanneer bij beide zijden hetzelfde opgeteld of afgetrokken wordt. In symbolen betekent dit dat uit $x=y$ volgt dat $x+z=y+z$ en $x-z=y-z$. Boole verzuimt overigens wel om de eveneens geldige wetten van de associatie te noemen: $(xy)z=x(yz)$ en $(x+y)+z=x+(y+z)$.

Boole constateert vervolgens dat alle hierboven genoemde wetten (behalve de ‘law of duality’) geldig zijn voor de rekenkunde van gehele getallen en dat wanneer wij ons voor wat betreft het *evalueren* van rekenkundige wetten ons beperken tot de getallen 0 en 1 ook de ‘law of duality’ geldig is. Dit beweegt Boole ertoe om zijn bekende 01-principe te formuleren. Boole’s 01-principe stelt dat de fundamentele wetten en processen van zijn symbolische systeem voor primaire proposities identiek zijn aan de wetten en processen van de rekenkunde van gehele getallen wanneer wij ons voor wat betreft het evalueren van deze wetten en processen ons beperken tot de getallen 0 en 1. Dit betekent dus niet zoals ik al eerder heb aangegeven dat Boole zich wil beperken tot een rekenkunde waarvan het getallendomein zelf is gereduceerd tot 0 en 1. Boole laat in zijn systeem dan ook alle gehele getallen (zoals -1 of 2) toe die bij het uitwerken van algebraïsche expressies naar voren komen. Zo volgt uit de expressie $(x-y)^2=0$ bijvoorbeeld dat $x^2-2xy+y^2=0$.

Het is belangrijk om reeds hier te constateren dat Boole’s 01-principe ongeldig is voor het domein van de primaire proposities. De rekenkundige wet ‘Uit $ab=0$ volgt $a=0$ of $b=0$’ geldt immers niet voor Boole’s systeem. Het feit dat een klasse ab geen elementen bevat betekent immers niet dat de klasse a of de klasse b geen elementen bevat. Neem voor a maar de klasse van alle mannen en voor b de klasse van alle vrouwen. Hoewel het 01-principe dus ongeldig is maakt Boole er heel vaak gebruik van. Zo vervangt hij bijvoorbeeld probleemloos een expressie als $2x=2y$ door $x=y$. Dit is echter alléén een geoorloofde overgang indien het 01-principe geldig zou zijn. Boole vervangt overigens niet zomaar $zx=zy$ door $x=y$ omdat hij zich realiseert dat net zoals in de rekenkunde deze overgang ongeldig zou zijn wanneer $z=0$. Boole vergeet echter dat (in tegenstelling tot de rekenkunde) in zijn systeem deze overgang eveneens ongeldig is wanneer z niet gelijk is aan 0.

Boole merkt verder op dat de bekende wet van de contradictie (‘het is onmogelijk dat eenzelfde kwaliteit zowel niet als wél toekomt aan hetzelfde voorwerp’) dat bij Aristoteles een fundamenteel metafysisch axioma is, in zijn systeem een rechtstreeks gevolg is van de ‘law of duality’. Uit $x=x^2$ volgt namelijk $x-x^2=o$ ofwel $x(1-x)=0$. We zien dus dat bij Boole de wetten van de logica niet alleen betrekking hebben op correct redeneren (epistemologie) maar daarnaast ook op de structuur van de

werkelijkheid (ontologie).
We kunnen nu inzichtelijk maken waarom volgens Boole x+y alléén een klasse representeert indien x en y disjunct zijn. Beschouw $(x+y)^2$. Indien x+y een klasse representeert moet volgens de wet van de dualiteit gelden dat $(x+y)^2=x+y$. Hieruit volgt na enig rekenwerk dat xy=0 hetgeen aangetoond moest worden. Evenzo kan ingezien worden dat x-y alléén een klasse representeert indien y een deelklasse is van x. Uitwerken van $(x-y)^2=x-y$ levert namelijk xy=y ofwel y is een deelklasse van x. Opmerkelijk genoeg zijn deze afleidingen bij Boole zelf niet te vinden. Wel formuleert Boole een volgens hem noodzakelijke en voldoende conditie voor interpreteerbaarheid. Deze conditie luidt dat een complexe algebraïsche expressie f interpreteerbaar is als klasse dan en slechts dan als $f^2=f$. Merk op dat voor ieder enkelvoudig klassesymbool x in Boole's systeem per definitie geldt dat $x^2=x$. Uit het feit dat f interpreteerbaar is als klasse volgt natuurlijk automatisch dat f idempotent is. Boole geeft echter géén overtuigend argument voor het feit dat uit de idempotentie van f ook volgt dat f interpreteerbaar is als klasse. Ik kom hier in het kader van de behandeling van Boole's expansietheorema nog op terug.

Boole is er zelf van overtuigd dat in zijn systeem ook individuen gerepresenteerd kunnen worden. Zo kan bijvoorbeeld het individu Plato gerepresenteerd worden door een concept p waarvan de omvang (extensie) alléén bestaat uit het individu Plato. De klasse p bevat dus één element: Plato zelf.

Ik zal nu Boole's generieke algebraïsche deductiemethoden voor primaire proposities bespreken. Ondanks Boole's bewering dat alle algebraïsche processen van de rekenkunde (voorzover geldig na evaluatie van alléén de getallen 0 en 1) van toepassing zijn op zijn logische systeem, houdt hij zich uitsluitend bezig met het afleiden van nieuwe vergelijkingen uit gegeven vergelijkingen. Uit een collectie van vergelijkingen (premissen) leidt Boole dus één of meerdere vergelijkingen (conclusies) af. We hebben al een paar voorbeelden van dergelijke algebraïsche deducties gezien.

Zoals hierboven aangegeven is een enkelvoudige of complexe term a interpreteerbaar als klasse indien $a^2=a$. Boole noemt een vergelijking a=b van (complexe) termen interpreteerbaar indien zowel a als b interpreteerbaar zijn. Een interpreteerbare algebraïsche deductie is een deductie in Boole's systeem waarvan de premissen en conclusie interpreteerbaar zijn. Het opmerkelijke aan Boole's systeem is dat voor iedere interpreteerbare algebraïsche deductie geldt dat de conclusie een strikt noodzakelijk logisch gevolg is van de premissen. Dit geldt zelfs wanneer één of meerdere tussen-resultaten van de deductie niet interpreteerbaar zijn. Ik geef hiervan een eenvoudig voorbeeld. Uit de interpreteerbare premisse a(1-b)+b(1-a)=0 volgt a-2ab+b=0. Uit a-2ab+b=0 volgt $(a-b)^2=0$. Tenslotte volgt hieruit a=b. We zien dat de premisse en de conclusie beide interpreteerbaar zijn en dat de conclusie inderdaad een noodzakelijk logisch gevolg is van de premisse. Het verkregen tussen-resultaat a-2ab+b=0 is daarentegen niet interpreteerbaar. Boole stelt in zijn boek expliciet dat het géén enkel probleem is dat in zijn logisch systeem oninterpreteerbare tussenresultaten ontstaan. Dit zou namelijk een onderdeel zijn van 'de algemene symbolische methode'. Hij geeft als illustratie een analogie tussen zijn systeem en dat van de trigonometrie. Voor het maken van trigonometrische berekeningen kan volgens Boole immers probleemloos met de wortel uit -1 gerekend worden om geldige eindresultaten te verkrijgen. Deze analogie (die overigens niet opgaat omdat de wortel uit -1 binnen het kader van de trigonometrie wél een interpretatie gegeven kan worden) kan echter niet gelden als overtuigend argument. Hetzelfde geldt voor zijn bewering dat deze eigenschap van zijn systeem afgeleid kan worden door het bestuderen van één enkel representatief voorbeeld.

Boole realiseert zich dat hij om tot bruikbare resultaten te komen een manier moet vinden om uit een gegeven (al dan niet interpreteerbare) vergelijking altijd één of meerdere interpreteerbare conclusies te berekenen. Hiertoe dient zijn bekende expansie theorema. Dit theorema stelt dat voor iedere algebraïsche expressie f(x) in zijn logische systeem geldt dat f(x)=f(1)x+f(0)(1-x). Boole merkt op dat dit theorema direct uit zijn 01-principe volgt hetgeen inderdaad eenvoudig kan worden ingezien door het achtereenvolgens evalueren van x=0 en x=1. Het probleem is echter zoals we al eerder zagen dat

Boole's 01-principe ongeldig is. Daarom staat zijn expansie theorema ook op losse schroeven.
Boole breidt zijn expansie theorema eenvoudig uit naar expressies van meerdere lettersymbolen. Zo is bijvoorbeeld eenvoudig in te zien dat f(x,y)=f(1,1)xy+f(1,0)x(1-y)+f(0,1)(1-x)y+f(0,0)(1-x)(1-y). Hiertoe expandeert men f(x,y) eerst naar x en vervolgens naar y. De expressies xy, x(1-y), (1-x)y en (1-x)(1-y) noemt Boole de constituenten van de expansie. Hij laat op eenvoudige wijze zien dat iedere constituent van een expansie interpreteerbaar is, dat het product van twee verschillende constituenten van dezelfde expansie gelijk is aan nul en dat de som van alle constituenten van een gegeven expansie gelijk is aan 1. Vervolgens laat Boole zien hoe uit een gegeven vergelijking a=0 altijd één of meerdere interpreteerbare conclusies berekend kunnen worden. Ik zal dit met een voorbeeld duidelijk maken. Neem de vergelijking x+y=0 Expansie levert 2xy+x(1-y)+(1-x)y=0. Vermenigvuldigen van beide kanten met xy levert xy=0. Op vergelijkbare wijze vinden we eveneens de interpreteerbare vergelijkingen x(1-y)=0 en (1-x)y=0. Iedere constituent waarvan de coëfficiënt in de expansie ongelijk is aan nul dient dus zelf gelijk aan nul te worden gesteld.

Vergelijkingen van de vorm u=v kunnen op dezelfde wijze behandeld worden door te schrijven u-v=0 en vervolgens de expansie van u-v te bepalen. Boole leidt echter een special theorema af voor vergelijkingen van de vorm u=v met u interpreteerbaar en v ongelijk aan 0. Dit uv-theorema stelt dat iedere constituent van de expansie van v waarvan de bijbehorende coëfficiënt niet idempotent is gelijk is aan nul. Boole's bewijs voor dit theorema is wederom gebaseerd op zijn 01-principe.

Boole beweert verder dat iedere expressie f(x,y) tot een interpreteerbare expansie leidt dan en slechts dan als f(x,y) zelf interpreteerbaar is. Hiervoor geeft hij echter geen bewijs maar wederom alléén voorbeelden. Zo leidt bijvoorbeeld de niet interpreteerbare expressie x-y inderdaad tot een niet interpreteerbare expansie x(1-y)-y(1-x) terwijl de interpreteerbare expressie x-xy leidt tot de interpreteerbare expansie x(1-y). De 'slechts dan' kan eenvoudig worden ingezien door te laten zien dat het kwadraat van iedere interpreteerbare expansie gelijk is aan zichzelf. De 'dan' is echter niet zo eenvoudig in te zien en vereist wederom een beroep op Boole's 01-principe.

Boole introduceert ook de deeloperator in zijn systeem door zich wederom te beroepen op zijn 01-principe. Zo leidt hij uit x=yz bijvoorbeeld z=x/y af. Nu heeft Boole in eerdere hoofdstukken zijn 01-principe alléén aannemelijk gemaakt voor de operatoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen. Op geen enkel moment onderwerpt Boole de deeloperator aan eenzelfde soort analyse. Dit kan ook helemaal niet omdat de deeloperator in tegenstelling tot de andere operatoren in zijn logisch systeem geen enkele betekenis heeft. Boole's introductie van de deeloperator is daarmee feitelijk ongegrond.

De deductie van z=x/y uit x=yz is overigens ongeldig zelfs als Boole's beroep op zijn 01-principe voor wat betreft de deeloperator correct zou zijn. In de rekenkunde is deze stap immers alléén geoorloofd indien z ongelijk is aan 0. Boole lijkt zich dit niet te realiseren.

Uitgaande van z=x/y past Boole zijn expansietheorema toe op x/y om te komen tot z = 1/1 xy + 1/0 x(1-y) + 0/1 (1-x)y + 0/0 (1-x)(1-y) ofwel z = xy + 1/0 x(1-y) + 0/0 (1-x)(1-y). Boole stelt vervolgens dat 0/0 in de rekenkunde een onbepaald getal is en dat volgens zijn 01-principe de expressie 0/0 'dus' vervangen mag worden door een onbepaald klassesymbool v. Hieruit volgt dat z = xy + 1/0 x(1-y) + v(1-x)(1-y). Toepassen van Boole's genoemde uv-theorema (en Boole's ongefundeerde claim dat 1/0 niet idempotent is) leidt tenslotte tot de conclusie dat x(1-y)=0 en z = xy + v(1-x)(1-y). De conclusie bestaat dus uit twee proposities die beiden verassend genoeg inderdaad een logisch gevolg zijn van de premisse x=yz. Wanneer de klasse x bestaat uit de individuen die zowel tot de klasse y als de klasse z behoren dan bestaan er inderdaad geen individuen die niet tot de klasse y maar wel tot de klasse x behoren. Bovendien bestaat dan de klasse z inderdaad uit de individuen die zowel tot klasse x als y behoren vermeerderd met een onbepaald deel van de individuen die noch tot klasse x en noch tot klasse y behoren.

Boole stelt dat ieder onbepaald klassesymbool eventueel gelijk kan zijn aan 0. In Boole's systeem is er voor wat betreft de klassesymbolen dus geen sprake van 'existential import'. Overigens kan binnen Boole's systeem niet uitgedrukt worden dat een bepaalde klasse ongelijk is aan 0. In zijn systeem kunnen dus geen existentiële uitspraken gerepresenteerd worden zoals al eerder is opgemerkt.

Zoals eerder aangegeven eist Boole dat zijn symbolische methode moet beschikken over een eliminatie procedure voor het elimineren van lettersymbolen die niet in de conclusie mogen voorkomen. Hiertoe leidt Boole zijn zogenaamde eliminatietheorema af. Dit theorema luidt dat uit f(x)=0 volgt dat f(1)f(0)=0. Uiteraard kan dit theorema gegeneraliseerd worden naar expressies van meerdere lettersymbolen. Neem bijvoorbeeld f(x,y)=0. Toepassen van het eliminatietheorema op y leidt tot f(x,1)f(x,0)=0. Toepassen van het eliminatietheorema op deze expressie levert vervolgens f(1,1)f(1,0)f(0,1)f(0,0)=0. Boole's eliminatietheorema volgt direct uit zijn 01-principe. Boole kiest overigens voor een drietal directe afleidingen die echter indirect toch weer gebaseerd zijn op het 01-principe. Twee van deze afleidingen maken daarnaast ook op oneigenlijke wijze gebruik van de deeloperator omdat Boole in deze afleidingen deelt door een klasse waarvan niet gegeven is dat zij ongelijk is aan 0.

Een toepassingsvoorbeeld van het eliminatietheorema is de afleiding van y(1-x)=0 uit y=zx. De expressie y=zx kunnen we immers schrijven als y-zx=0. Door vervolgens het eliminatietheorema te gebruiken om z te elimineren vinden we dat y(y-x)=0. Uit y(y-x)=0 volgt direct y(1-x)=0 omdat $y^2$=y.

Nadat Boole zijn eliminatietheorema heeft behandeld leidt Boole nog een aantal andere resultaten af voor zijn symbolische systeem voor primaire proposities. Zo behandelt hij bijvoorbeeld een aantal algebraïsche technieken om een gegeven stelsel van premissen te reduceren tot één equivalente premisse. Één van deze methoden is bijvoorbeeld het vervangen van het stelsel f=0, g=0, ... , h=0 door $f^2 + g^2 + ... + h^2 = 0$. Een dergelijke techniek heeft Boole nodig om zijn eerder gevonden theorema's te kunnen gebruiken wanneer er meer dan één premisse gegeven is. Daarnaast ontwikkelt Boole een aantal technieken om een gegeven vergelijking te kunnen inkorten zodat afleidingen met behulp van deze vergelijking eenvoudiger worden. Ik zal hier niet nader ingaan op deze resultaten omdat ze nogal technisch zijn en het inzicht in de aard van Boole's systeem niet wezenlijk vergroten. Hetzelfde geldt voor Boole's logische analyse van een aantal argumentaties uit de werken 'Demonstration of the being and attributes of God' van Samuel Clarke en 'Ethica Ordine Geometrico Demonstrata' van Spinoza.

*Boole's behandeling van de klassieke leer van het syllogisme*

Boole was ervan overtuigd dat uit zijn systeem voor primaire proposities de gehele klassieke syllogismeleer kan worden afgeleid. Zijn systeem zou deze klassieke logica dus volledig kunnen verklaren en daarmee funderen. Hij zegt dan ook in zijn boek dat de afleidingsregels die binnen de syllogistiek als evident worden beschouwd niet 'de ultieme processen van de logica zijn'. Bovendien was hij van mening dat zijn systeem een veel groter bereik heeft van propositie- en deductievormen dan het beperkte begrippenapparaat van de syllogistiek. Boole had overigens wel waardering voor de klassieke syllogismeleer en zijn doel was dan ook niet om deze logica aan scherpe kritiek te onderwerpen. Boole wilde juist laten zien waarom de logische deductieregels van de syllogismeleer geldig zijn. Wel benadrukt Boole zoals gezegd dat zijn systeem voor primaire proposities zowel fundamenteler als uitgebreider is dan de klassieke leer van het syllogisme. Deze klassieke leer gaat volgens Boole in tegenstelling tot zijn eigen systeem uiteindelijk dus niet diep en ver genoeg. Hij noemt deze klassieke logica dan ook 'geen wetenschap maar een collectie van wetenschappelijke waarheden, te onvolledig om zelf als systeem te dienen en niet fundamenteel genoeg om als fundament te dienen waarop een perfect systeem gebaseerd kan worden'. De relatie van zijn systeem van primaire proposities tot de syllogismeleer is volgens Boole dan ook vergelijkbaar met de relatie van Newton’s mechanica tot de astronomische wetten van Kepler. Kepler’s wetten vormen een collectie van wetenschappelijke waarheden zonder fundament. Het is Newton’s mechanica die laat zien waarom Kepler gelijk heeft en die bovendien een veel ruimer bereik heeft dan de wetten van Kepler. Door de syllogismeleer te beschouwen als een speciaal geval van zijn systeem levert Boole uiteindelijk een volledig extensionele interpretatie van de syllogistiek. Ik zal nu in meer detail laten zien hoe Boole de syllogistiek behandelt. De klassieke syllogismeleer kent in totaal vier verschillende soorten categorische oordeelsvormen:

| | |
|---|---|
| A-oordeel | Alle Y zijn X |
| E-oordeel | Geen Y is X |
| I-oordeel | Sommige Y zijn X |
| O-oordeel | Sommige Y zijn geen X |

Boole beeldt deze oordeelsvormen op de volgende wijze af in zijn systeem van primaire proposities:

| | |
|---|---|
| A-oordeel | $y=vx$ |
| E-oordeel | $y=v(1-x)$ |
| I-oordeel | $vy=vx$ |
| O-oordeel | $vy=v(1-x)$ |

Hierbij is v een onbepaald klassesymbool. Boole realiseert zich in zijn boek overigens niet dat hij voor wat betreft de I en O oordelen moet eisen dat v ongelijk is aan 0. Zonder deze eis geldt namelijk voor ieder paar termen X en Y dat sommige Y gelijk zijn aan X én dat sommige Y niet gelijk zijn aan X. Dit kan uiteraard nooit de bedoeling zijn.

In plaats van vier verschillende copula gebruikt Boole slechts één copula, namelijk het gelijkheids-teken. De klassieke noties van kwantiteit (particulier of universeel) en kwaliteit (affirmatief of negatief) hebben dus geen betekenis meer in Boole’s systeem omdat deze noties slaan op de vier verschillende typen copula A, E, I en O. Toch wil Boole deze klassieke noties behouden door ze in zijn systeem een geheel andere invulling te geven. Bij Boole slaan deze noties namelijk niet langer op de copula van een oordeelsvorm. Hij past deze noties nu toe op het subject f en predikaat g van een f=g oordeel. Ik zal dit hieronder met drie voorbeelden verduidelijken.

Het A-oordeel ‘Alle Y zijn X’ is universeel en affirmatief. Boole leest het A-oordeel echter als y=vx en noemt het subject y universeel-affirmatief en het predikaat vx particulier-affirmatief. Evenzo is het E-oordeel ‘Geen Y is X’ universeel en negatief. Boole leest het E-oordeel echter als y=v(1-x) en noemt het subject y universeel-affirmatief en het predikaat v(1-x) particulier-negatief. Tenslotte is bijvoorbeeld het I-oordeel particulier en affirmatief. Boole leest dit oordeel echter als vy=vx en noemt zowel het subject als predikaat particulier-affirmatief. Boole noemt een term dus universeel (particulier) indien we spreken over heel (een deel van) de collectie van individuen die met de desbetreffende term wordt aangeduid. We zien dat Boole het klassieke onderscheid tussen verschillende typen copula in zijn systeem overbrengt op een onderscheid in verschillende soorten termen. Meer in het algemeen kunnen we concluderen dat Boole slechts één copula hoeft te gebruiken omdat in zijn systeem complexe concepten ook als complexe term gedenoteerd kunnen worden. Hierbij kan bijvoorbeeld gedacht worden aan complexe termen als vy of v(1-x). De klassieke leer van het syllogisme kende een dergelijke denotatie niet omdat alle termen daar van de vorm ‘X’ of ‘niet-X’ zijn. Hierdoor was de syllogistiek welhaast gedwongen om te werken met verschillende soorten copula.

Boole laat vervolgens zien hoe een aantal bekende onmiddellijke en middellijke syllogistische afleidingsregels vanuit zijn systeem verklaard kunnen worden. Ik zal een aantal van zijn voorbeelden hier toelichten. Allereerst E-conversie. Neem het oordeel ‘Geen Y is X’ en schrijf dit als y=v(1-x).

Eliminatie van v levert (y-1+x)y=0 ofwel xy=0. Hieruit volgt x=0/y en toepassen van het expansietheorema levert vervolgens x=0/0(1-y) ofwel x=w(1-y). De interpretatie van deze laatste vergelijking is 'Geen X is Y'. Hiermee is dus E-conversie aangetoond. Vervolgens I-conversie. Neem het oordeel 'Sommige Y zijn X' en schrijf dit als vy=vx. Uit vy=vx volgt onmiddellijk dat vx=vy ofwel 'Sommige X zijn Y'. Hiermee is dus I-conversie aangetoond. De beide vormen van subalternatie zijn ook verklaarbaar. Het A-oordeel 'Alle Y zijn X' kan immers geschreven worden als y=vx. Door nu beide zijden van deze vergelijking met v te vermenigvuldigen vinden we dat vy=vx ofwel 'Sommige Y zijn X'. Op precies dezelfde wijze kan aangetoond worden dat uit 'Geen Y is X' volgt dat 'Sommige Y zijn geen X'. Merk op dat we bij de laatste twee afleidingen impliciet hebben moeten aannemen dat v ongelijk is aan 0. Deze aanname is dan ook noodzakelijk om subalternatie met Boole's systeem te kunnen verklaren. Boole had daarom ook voor de A en E oordelen moeten eisen dat v ongelijk is aan 0. Dit lijkt hij zich niet te realiseren.

Ik zal nu een tweetal voorbeelden geven van syllogismen. Allereerst het perfecte syllogisme Barbara dat ook door Boole behandeld wordt. Dit syllogisme stelt dat uit 'Alle X zijn Y' en 'Alle Y zijn Z' volgt dat 'Alle X zijn Z'. Herschrijven levert de twee premissen x=vy en y=wz. Substitutie van de tweede premisse in de eerste premisse levert x=v(wz) ofwel x=(vw)z. Deze vergelijking kan inderdaad geïnterpreteerd worden als 'Alle X zijn Z'. Het probleem is echter dat vw gelijk kan zijn aan 0 zelfs wanneer v en w beiden ongelijk zijn aan nul. Dit probleem lijkt Boole zich niet te realiseren. Natuurlijk kunnen we voor A-oordelen de eis dat v ongelijk is aan 0 laten vallen. Zoals we al eerder zagen is dan echter subalternatie niet meer geldig, hetgeen zeker niet gewenst is. Boole geeft ook nog een andere afleiding voor Barbara. Hiertoe gebruikt Boole zijn eliminatietheorema om uit x=vy en y=wz achtereenvolgens te besluiten tot x(1-y)=0 en y(1-z)=0. Sommatie van deze twee vergelijkingen en eliminatie van y levert dan x(1-z)=0 ofwel x=0/(1-z) en dus x=(0/0)z na toepassing van het expansietheorema. Deze laatste expressie kan nu geschreven worden als x=kz. Nu ontstaat er echter een nieuw probleem. Het onbepaalde klassesymbool k kan namelijk gelijk zijn aan 0 waardoor we niet mogen concluderen tot 'Alle X zijn Z'. Ook dit probleem lijkt Boole zich niet te realiseren. Het tweede voorbeeld betreft het syllogisme dat stelt dat uit 'Alle A zijn B' en 'Geen B is C' volgt dat 'Geen A is C'. Herschrijven levert wederom de twee premissen a=vb en b=w(1-c). Hieruit volgt na substitutie direct dat a=vw(1-c) ofwel 'Geen A is C'. In deze afleiding komen we dezelfde problemen tegen die we bij het eerste voorbeeld ook al tegenkwamen. Zo kan vw wederom gelijk zijn aan 0 terwijl noch v noch w gelijk is aan 0.

Boole merkt overigens op dat een aantal syllogismen ook kunnen worden verklaard door een beroep op het 'dictum of Aristotle': hetgeen bevestigd of ontkend kan worden van een genus kan ook bevestigd of ontkend worden van iedere species onder dat genus. Dit geldt eveneens voor de twee syllogismen die hierboven vanuit Boole's systeem zijn afgeleid.

Boole bespreekt in zijn hoofdstuk over de syllogismeleer ook oordeelsvormen met negatieve termen zoals 'Alle niet-Y zijn X' of 'Sommige Y zijn niet-X'. Op deze manier kan Boole bijvoorbeeld ook de bekende wet van de contrapositie afleiden. Ik zal zijn afleiding hier kort bespreken. Neem het oordeel 'Alle Y zijn X' en schrijf dit als y=vx ofwel y-vx=0. Eliminatie van v levert (y-x)y=0 ofwel y(1-x)=0. Boole herschrijft dit tot 1-x=0/y en past vervolgens zijn expansietheorema toe. Hieruit volgt dan dat 1-x=(0/0)(1-y). Deze laatste vergelijking kan volgens Boole geschreven worden als 1-x=v(1-y) ofwel 'Alle niet-X zijn niet-Y'. Het probleem dat v gelijk aan nul kan zijn treedt nu niet op omdat hier reeds moest worden aangenomen dat v ongelijk is aan 0.

Boole lijkt dus in staat om een aantal onmiddellijke en middellijke syllogistische redeneerregels vanuit zijn systeem te verklaren. Sommige van deze regels worden binnen de leer van de syllogistiek als evident en daarom als niet nader verklaarbaar beschouwd. Binnen Boole's systeem kunnen deze regels nu langs een aantal algebraïsche stappen afgeleid worden uit meer fundamentele denkwetten.

Boole heeft hiermee echter nog niet overtuigend laten zien dat de gehele syllogistiek reduceerbaar is tot zijn systeem. Hiervoor is namelijk meer nodig dan het behandelen van een beperkt aantal voorbeelden die bovendien zoals we zagen niet altijd zonder problemen zijn. Boole's afbeelding van de syllogistiek in zijn systeem laat echter wel zien dat binnen zijn symbolisch algebraïsche systeem inderdaad veel meer soorten proposities en logische deducties mogelijk zijn dan in de klassieke leer van het syllogisme. Hierbij kan gedacht worden aan complexe proposities als $xy(1-z)+(1-x)z=1$, de wet van de tegenspraak $(1-x)x=0$ of iedere denkbare tautologie zoals $x=x$. Wanneer we ook Boole's systeem voor secundaire proposities in beschouwing nemen ontstaan nog veel meer voorbeelden van proposities en deducties die in de syllogistiek niet voorhanden zijn.

*Boole's systeem voor secundaire proposities*

Zoals eerder aangegeven onderscheidt Boole naast primaire proposities ook secundaire proposities. Volgens Boole zijn de fundamentele wetten en de hiervan afgeleide algebraïsche methoden voor secundaire proposities identiek aan zijn wetten en methoden voor primaire proposities. Secundaire proposities ontstaan volgens Boole wanneer we in plaats van dingen proposities tot onderwerp van onze gedachten maken. Laat X en Y proposities zijn zoals 'De zon schijnt' of 'Het regent'. Volgens Boole zijn dan proposities als 'X is waar' of 'Y is onwaar' voorbeelden van secundaire proposities. Andere voorbeelden zijn 'X is waar of Y is waar', 'X en Y zijn allebei waar' en 'Als X waar is dan is Y ook waar'. Secundaire proposities drukken dus relaties tussen proposities uit. Volgens Boole spelen secundaire proposities een belangrijke rol in zowel ons dagelijks leven als in de wetenschap. Het bestuderen van secundaire proposities leidt volgens hem dan ook tot nieuwe interessante toepassingsgebieden. Boole beschouwt verder het feit dat zijn systeem voor primaire proposities ook geldig is voor secundaire proposities als 'een bewijs voor de eenduidigheid van het menselijk verstand'.

Ik zal nu kort Boole's systeem voor secundaire proposities bespreken. Zoals we zagen gebruikt Boole hoofdletters X, Y, Z om proposities te denoteren. Hij gebruikt vervolgens kleine letters x, y, z om mentale operaties van het verstand uit te drukken. Zo is bijvoorbeeld x de mentale operatie die het verstand gebruikt om onze aandacht te richten op het gedeelte van de tijd waarop de propositie X waar is. Zo is dan $x+y$ de mentale operatie die onze aandacht richt op de tijd dat X óf Y waar is, waarbij gegeven is dat X en Y niet tegelijkertijd waar kunnen zijn. De expressie $x-y$ geeft dan de tijd aan dat propositie X waar is en propositie Y onwaar is, waarbij gegeven is dat de tijd dat propositie Y waar is een deel is van de tijd dat propositie X waar is. Uiteraard is vervolgens xy de tijd waarop propositie X en Y beiden waar zijn. Boole laat zien dat onder deze interpretatie van zijn symbolen alle fundamentele denkwetten voor primaire proposities ook geldig zijn voor secundaire proposities. Zo vinden we opnieuw denkwetten als $xy=yx$, $x+y=y+x$, $x^2=x$ en $x(y+z)=xy+xz$. Wederom verzuimt Boole de wetten van de associatie te noemen: $(xy)z=x(yz)$ en $(x+y)+z=x+(y+z)$. Boole voert ook hier weer de symbolen 0 en 1 in. Het symbool 0 staat voor de lege tijd. Een propositie X die nooit waar is kan dan ook gerepresenteerd worden door 0. Het symbool 1 staat voor de gehele tijd. Een propositie Y die altijd waar is kan dan ook gerepresenteerd worden door 1. We kunnen ook stellen dat 1 het UoD representeert. In sommige contexten zal 1 staan voor één enkele dag of één enkel uur. In andere contexten kan 1 bijvoorbeeld één enkel tijdstip of zelfs de 'gehele tijd van het werkelijke universum' representeren.

In Boole's systeem van secundaire proposities kunnen eenvoudig complexe termen geïntroduceerd worden. Zo staat $xy(1-z)$ voor het deel van de tijd waarvoor geldt dat X waar is, Y waar is en Z onwaar is. Met een aantal voorbeelden kan eenvoudig worden ingezien hoe Boole in zijn systeem secundaire proposities representeert. Zo wordt de secundaire propositie 'X is waar dan en slechts dan als Y waar is' weergegeven door de gelijkheid $x=y$. De secundaire propositie 'X is waar' wordt weergegeven als $x=1$ en de secundaire propositie 'Y is onwaar' als $y=0$. De conditionele secundaire propositie 'Als Y waar is dan is X ook waar' is equivalent met het feit dat de tijd waarop Y waar is bevat is in de tijd waarop X waar is. Op ieder moment dat Y waar is, is namelijk ook X waar. Daarom wordt deze conditionele propositie gerepresenteerd als y=vx. Hierbij kan v staan voor een eventueel leeg deel van de gegeven tijd. Verder kan in Boole's systeem van secundaire proposities ook de wet van de uitgesloten derde en de wet van de dubbele negatie eenvoudig worden weergegeven. De eerste door x+(1-x)=1 en de tweede door 1-(1-x)=x. Het is van belang om op te merken dat Boole's gebruik van de tijd om tot een interpretatie voor zijn systeem voor secundaire proposities te komen niet essentieel is. Boole had namelijk x en y ook kunnen definiëren als de waarheidswaarde van de proposities X en Y. Hij lijkt zich dit niet te realiseren. Beide interpretaties zijn geheel equivalent voor wat betreft de uit deze interpretatie volgende wetten en afleidingsregels. Neem bijvoorbeeld de secundaire propositie y=xz. Deze propositie stelt dat de tijd waarop Y waar is gelijk is aan de tijd waarop X en Z allebei waar zijn. Dit is inderdaad precies hetzelfde als de constatering dat Y waar is dan en slechts dan als X en Z allebei waar zijn. De propositie Y kan onder beide interpretaties dan ook luiden: 'X is waar én Z is waar'.

Zoals gezegd neemt Boole aan dat zijn systeem voor secundaire proposities exact dezelfde symbolen, wetten en afleidingsregels kent als zijn systeem voor primaire proposities. Dit is echter absoluut niet het geval. Zoals we al eerder zagen is de logische wet 'Uit ab=0 volgt a=0 of b=0' ongeldig in Boole's systeem voor primaire proposities. Deze logische wet geldt echter wél in Boole's systeem voor secundaire proposities. Uit 'ab=0' volgt immers dat de propositie 'A is waar én B is waar' onwaar is en dus dat de proposities A en B niet allebei waar zijn. Hieruit kan dan geconcludeerd worden dat A onwaar is of B onwaar is, ofwel 'a=0 of b=0'.

In tegenstelling tot Boole's systeem voor primaire proposities lijkt Boole's systeem voor secundaire proposities dus wél te voldoen aan zijn 01-principe. Verder is het zo dat Boole's systeem voor secundaire proposities geen rekening houdt met de inwendige structuur van een enkelvoudige propositie X. Boole's systeem reduceert iedere enkelvoudige propositie X namelijk geheel tot de bij X behorende waarheidswaarde x.

## 4. Evaluatie van Boole's symbolische methode

*Relatie tussen Boole's symbolische methode en de wiskunde*

Het was Boole die als één van de eerste wiskunde (namelijk de algebra) ging gebruiken om logica te beoefenen. Hoewel Boole dit niet expliciet zegt krijg je als lezer soms de indruk dat voor Boole de logica zelfs niets meer of minder is dan een interessant toepassingsgebied van de algebra. De algebra dient bij Boole dan wel veel breder te worden opgevat als een universele algebra ofwel 'symbolische methode' welke naast op getallen ook op ieder ander kennisdomein kan worden toegepast dat zich leent voor symboolmanipulatie. Deze gedachte komt dicht bij de opvatting van veel moderne wiskundigen voor wie logica samenvalt met mathematische logica en die stellen dat mathematische logica niets meer of minder is dan een onderdeel van de wiskunde, vergelijkbaar met onderdelen als getaltheorie, groepentheorie of functionaalanalyse. Het bijzondere van mathematische logica is voor deze moderne wiskundigen dat zij gebruikt kan worden om de wiskunde zelf te bestuderen. Wiskunde kan volgens hen dus object van onderzoek zijn *vanuit de wiskunde zelf*. Deze moderne wiskundigen staan dan ook verder af van de logicistische opvattingen van bijvoorbeeld Frege of Russell die met logica juist de wiskunde willen funderen door te laten zien hoe de wiskunde geheel vanuit de logica kan worden opgebouwd. Bij Frege en Russell is wiskunde dus omgekeerd een onderdeel van de logica. Frege stelt dan ook (met een verwijzing naar Leibniz) dat hij een 'lingua characterica' wil ontwikkelen voor in eerste instantie de wiskunde. Voor de meetkunde maakt Frege overigens een uitzondering op zijn logicistische positie.

Een groot bezwaar aan Boole's behandeling van de logica is dat zijn systeem door hem niet adequaat wordt geformaliseerd. Boole maakt namelijk veel gebruik van plausibiliteitsargumenten in plaats van echte rigoureuze bewijzen. Hij doet dan ook regelmatig een beroep op het intuïtief aanvoelen voor wat toegelaten is en wat niet. Boole’s informele systeem is dan ook op z’n best gezegd semi-formeel. Hierdoor is Boole niet in staat om zijn logisch systeem als object van studie te beschouwen en zo bijvoorbeeld de consistentie, correctheid of volledigheid van zijn systeem te onderzoeken. Om dezelfde reden vinden we bij Boole geen bewijstheorie. Een ander belangrijk gemis bij Boole is het geheel ontbreken van ‘reductio ad absurdum’. Hierdoor zijn alle deducties bij Boole direct. Daarnaast biedt Boole geen methode om te laten zien dat een bepaalde propositie logisch onafhankelijk is van gegeven premissen. Er ontbreekt dus wel het een en ander aan Boole’s behandeling van de logica.

Het opmerkelijke aan Boole’s systeem is verder dat zijn informele methoden inderdaad lijken te werken, maar dat je uiteindelijk niet kunt begrijpen waarom het eigenlijk werkt. Dit laatste vereist immers een strenge, heldere en expliciete specificatie van Boole’s systeem en een dergelijke formele specificatie ontbreekt nu juist in Boole’s boek. Wél is het zo dat Boole’s quasi-formele behandeling beschouwd kan worden als een eerste aanzet tot een formele specificatie. Zelf heb ik geprobeerd om een volledige formele specificatie te vinden van zijn partieel gedefinieerde systeem om zo te kunnen onderzoeken óf (en zo ja waarom) zijn informele methoden werken. Hoewel ik zo’n specificatie niet heb gevonden is mij wel duidelijk geworden dat de later naar hem vernoemde Booleaanse algebra niet de gezochte formele specificatie kan zijn. In een Booleaanse algebra geldt namelijk voor *iedere* a dat $a^2=a$ en $a+a=a$ hetgeen in Boole’s algebraïsche systeem niet het geval is. In Boole’s systeem geldt $a^2=a$ immers alléén wanneer a interpreteerbaar is. Bovendien is $a+a=a$ in Boole’s systeem equivalent met $a=0$.

*Relatie tussen Boole’s symbolische methode en de syllogismeleer*

Over de relatie tussen Boole’s systeem en de klassieke syllogismeleer is in paragraaf 3 al het nodige gezegd. Boole’s systeem kan beschouwd worden als zowel een verbreding als een verdieping van de klassieke syllogistiek. Boole’s systeem kan een verbreding van de syllogistiek genoemd worden omdat dit systeem een veel ruimer bereik kent van formeel behandelbare propositie- en deductie-vormen. Boole beschouwde zijn systeem ook als een verdieping van de syllogistiek omdat in zijn systeem ‘evidente syllogistische redeneerregels’ als stelling kunnen worden afgeleid uit meer fundamentele logisch-algebraïsche wetten.

Zoals we al in paragraad 3 zagen is hier wel het een en ander op af te dingen. Zo beschikt de syllogistiek over een volledige formele specificatie waardoor het mogelijk is om voor de klassieke leer van het syllogisme allerlei metalogische stellingen te bewijzen. Hierbij kan gedacht worden aan zowel bewijstheoretische resultaten als semantische resultaten. Voorbeelden van bewijstheoretische resultaten zijn stellingen die voor twee verschillende collecties afleidingsregels laten zien dat uit iedere willekeurige verzameling premissen precies dezelfde conclusies afgeleid kunnen worden. Voorbeelden van semantische resultaten zijn de volledigheid en de correctheid van de syllogistiek onder een extensionele interpretatie. Bovendien kent de syllogistiek zoals we al eerder zagen ‘reductio ad absurdum’ en een methode om te bewijzen dat een bepaalde propositie logisch onafhankelijk is van één of meerdere andere proposities. In Boole’s informele systeem is van dit alles géén sprake. Wel refereert Boole in zijn boek op een aantal plaatsen aan metalogische eigenschappen van zijn systeem. Hij geeft echter voor deze veronderstelde metalogische eigenschappen geen overtuigende verklaring.

*Boole’s symbolische methode en het ideaal van Leibniz*

Ik heb al eerder iets opgemerkt over Boole’s overtuiging dat hij met zijn symbolisch algebraïsche systeem alle mogelijke proposities van de wetenschap zou kunnen uitdrukken. Indien dit inderdaad zo zou zijn dan komt Boole wel heel dicht bij Leibniz’s ideaal van een universele tekentaal (‘lingua characterica’). De uitdrukkingskracht van Boole’s symbolische taal is echter onvoldoende voor het representeren van alle mogelijke proposities. In de eerste plaats kan Boole’s systeem niet omgaan met relaties tussen individuen en in de tweede plaats kent Boole’s systeem geen kwantificatie zoals Jean van Heijenoort in zijn artikel terecht opmerkt. Boole bezat dus geen ‘logisch perfecte taal’.

Desalniettemin kan gesteld worden dat Boole’s systeem een zeer belangrijke stap is geweest om Leibniz ideaal te realiseren. Zo vermeldt Peckhaus in zijn artikel dat Peirce en Schröder hebben laten zien hoe het systeem van Boole kan worden aangevuld met relaties en kwantificatie. Bovendien sluit juist Boole’s systeem qua opzet nauw aan bij Leibniz oorspronkelijke conceptie van een universele wetenschappelijke methode. Boole baseert zijn systeem namelijk op de algebra van de gehele getallen en kiest daarmee hetzelfde spoor als Leibniz die als model voor zijn universele rekenmethode (calculus ratiocinator) ook de algebra van de gehele getallen op het oog had. Boole’s behandeling van samengestelde concepten als concatenatie (ofwel vermenigvuldiging) van enkelvoudige concepten komt zelfs precies overeen met Leibniz’ conjunctiemodel van samengestelde concepten. De stelling dat Frege’s Begriffsschrift het ideaal van Leibniz velen malen dichter zou benaderen dan Boole’s algebraïsche logica doet dan ook niet geheel recht aan de resultaten van Boole en de door Leibniz zelf geanticipeerde algebraïsche aard van zijn universele tekentaal en bijbehorende rekenmethode.

Wél heeft Frege’s begrippentaal een veel rijkere uitdrukkingskracht dan Boole’s systeem. Frege vertrekt niet vanuit de concepten (zoals Boole) maar vanuit de propositie. In tegenstelling tot een algebraïsche benadering (zoals Boole) kiest Frege er bovendien voor om het vanuit de wiskunde bekende *functiebegrip* te introduceren in de logica voor het analyseren van proposities. Frege is langs deze weg in staat om ook *relaties* tussen individuen en vervolgens de universele en existentiële kwantoren in te voeren. Verder zagen we dat Boole een expliciet onderscheid maakt tussen enerzijds primaire en anderzijds secundaire proposities en deze ook apart van elkaar behandelt. Frege is echter in staat om primaire en secundaire proposities als één geïntegreerd geheel in zijn systeem onder te brengen. Om deze redenen kan met recht worden gesteld dat de logische taal van Frege voor wat betreft de mate van universaliteit een grote stap vooruit is ten opzichte van de algebraïsche taal van Boole. In dit licht valt de opmerking van Frege dat zijn begrippenschrift veel beter beantwoordt aan Leibniz’ conceptie van een universele tekentaal ofwel lingua characterica dan ook goed te begrijpen.
Overigens is ook voor Frege de notie van lingua characterica onlosmakelijk verbonden met de notie van calculus ratiocinator. De gedachte dat Boole’s systeem zich vooral (of zelfs uitsluitend!) zou richten op het ‘calculus’ aspect terwijl Frege’s systeem zich met name zou richten op het ‘lingua aspect’ is dan ook niet goed verdedigbaar. Boole en Frege hebben allebei een logisch systeem ontwikkeld dat zowel een calculus als een lingua omvat. Dat hun systemen beiden aspecten omvatten wordt door hen ook expliciet onderkend. Boole en Frege verschillen met name van mening over hoe de ‘lingua’ en bijbehorende ‘calculus’ er uit moeten zien. Het uiteendenken van deze aspecten als twee verschillende concepties van logica zoals Jean van Heijenoort in zijn artikel doet is dan ook kunstmatig. Het doet geen recht aan de opvattingen van zowel Boole als Frege en is bovendien in strijd met het feit dat beide aspecten juist onlosmakelijk met elkaar verbonden zijn binnen ieder adequaat logisch systeem. Elk logisch systeem moet namelijk bestaan uit een formele logische taal (‘de lingua characterica’) voor het formuleren van proposities waarop vervolgens formele deductieregels toegepast kunnen worden (‘de calculus ratiocinator’).

Peckhaus gaat in zijn artikel in op de wijze waarop Jean van Heijenoort in zijn artikel de logica van Boole tegenover die van Frege plaatst. Peckhaus geeft kort aan wat volgens Jean van Heijenoort de belangrijkste verschillen zijn tussen de systemen van Boole en Frege. Frege’s (Boole’s) logica kent een interne (externe) semantiek, een vast (variabel) UoD, kwantificatie (geen kwantificatie) en universaliteit (geen universaliteit). Aan Peckhaus behandeling zou ik hier slechts willen toevoegen dat de door Jean van Heijenoort geconstateerde verschillen met betrekking tot het UoD en semantiek misschien historisch correct, maar zeker niet fundamenteel zijn. We kunnen namelijk binnen het kader van Boole’s systeem ook een vast allesomvattend UoD aannemen en andersom kan Frege’s systeem net zo goed worden toegepast binnen verschillende contexten met steeds een ander UoD. Een strikt onderscheid tussen ongeïnterpreteerde talen en haar interpretaties (ofwel externe semantiek) past daarom probleemloos bij beide logische systemen. Hetzelfde geldt dan ook voor metalogische vragen.

*Tot slot*
Het is Boole geweest die als één van de eersten inzag dat de logica zich uitstekend leent voor een wiskundige behandeling. Boole zegt in zijn boek dan ook onomwonden dat de logische wetten en processen geheel wiskundig van aard zijn. Dat een wiskundige behandeling niet automatisch een symbolische algebraïsche behandeling hoeft te impliceren is een gedachte die pas ná Boole ingang zou vinden.

Door zijn strikt wiskundige benadering van logische wetten en deductiemethoden heeft Boole een zeer belangrijke rol gespeeld in het openen van de weg naar de moderne (mathematische) logica. Een weg die zéér succesvol zou zijn waardoor niet alléén de klassieke syllogismeleer, maar uiteindelijk ook de algebraïsche logica van Boole op de achtergrond zou raken.

**Literatuurlijst**

1. George Boole, An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities, Macmillan, 1854.

2. Gottlob Frege, Über den Zweck der Begriffsschrift, Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, 1882

3. Jean van Heijenoort, Logic as Calculus and Logic as Language, Synthese 17:324-30, 1967

4. Volker Peckhaus, Calculus Ratiocinator vs. Characteristica Universalis? The Two Traditions in Logic, Revisited, History and Philosophy of Logic 25:3-14, 2004

5. George Boole, The Calculus of Logic, The Cambridge and Dublin Mathematical Journal vol.3, 1848

6. Gottfried Leibniz, Philosophical papers and letters: On the general characteristic (1679), vertaald en bewerkt door L. E. Loember, 1969

7. John Corcoran, Aristotle’s Prior Analytics and Boole’s Laws of Thought, History and Philosophy of Logic 24:261-288, 2003

8. Klaus Glashoff, On Leibniz’ Characteristic Numbers, Studia Leibnitiana, 2004